Aula de Problemas nº 3

Minimização de funções (método de Karnaugh)

Operações Aritméticas

Problema 1

Utilizando o método de Karnaugh:

a) Minimize a função $f(A,B,C,D)=\sum m(0,2,6,8,9,12,13)$, em que A é a variável de maior peso, e apresente o resultado na forma disjuntiva e conjuntiva. Identifique os IPE e indique um implicante primo não-essencial.

R: Forma disjuntiva:
IPE1 = AC! devido a m9, m12 e m13
IPE2 = A!CD! devido a m6
IPNE = A!B!D! (poderia ser um outro)

$$f = A\bar{C} + \bar{A}\,C\bar{D} + \bar{A}\,\bar{B}\bar{D}$$

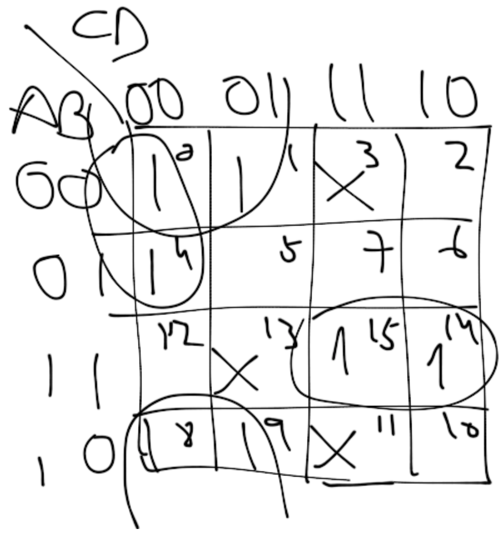
Forma conjuntiva:
IPE1 = A+D! devido a M1
IPE2 = A+B!+C! devido a M4
IPE3 = A!+C! devido a M10 e a M14

IPNE = C!+D! (não entra na expressão mínima)

$$f = (A+\bar{D})(A+\bar{B}+C)(\bar{A}+\bar{C})$$

b) Minimize a função $f(A,B,C,D)=\sum m(0,1,4,8,9,14,15)$, com indiferenças nas posições (3, 11 e 13), em que A é a variável de maior peso. Indique quais os implicantes primos essenciais.

R:

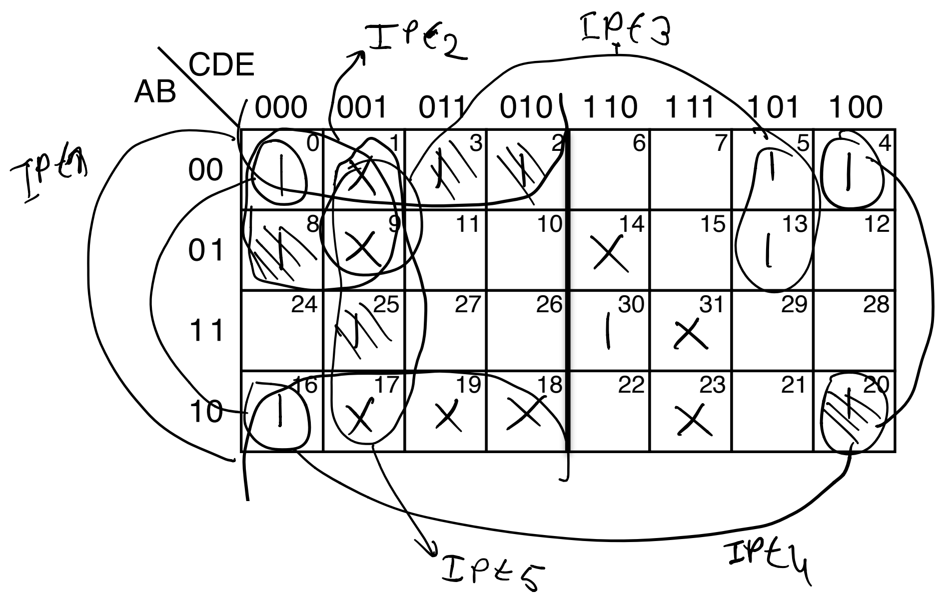


$$f=\overline{A}\,\overline{C}\overline{D}+\overline{B}\overline{C}+ABC$$

Quadrados essenciais: 4, 8, 14. IPE's=Todos os que estão na expressão da função minimizada, pois cada um desses implicantes contém um quadrado essencial (i.e. um mintermo que não está contido em nenhum outro implicante primo).

Problema 2

Considere a função $f(A,B,C,D,E) = \sum m(0,2,3,4,5,8,13,16,20,25,30)$, com indiferenças nas posições (1, 9, 14, 17, 18, 19, 23 e 31), em que A é a variável de maior peso. Minimize-a utilizando o método de Karnaugh obtendo uma soma de produtos, e indique, se existirem, os implicantes primos essenciais.



R:
IPE1 = B!C! devido a m3
IPE2 = A!C!D! devido a m8
IPE3 = A!D!E devido a m13
IPE4 = B!D!E! devido a m20
IPE5 = C!D!E devido a m25
IPNE = ABCD (poderia ser um outro)

$$f = \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\,\bar{C}\,\bar{D} + \bar{A}\,\bar{D}\,E + \bar{B}\,\bar{D}\,\bar{E} + \bar{C}\,\bar{D}\,E + ABCD$$

Problema 3

a) Obtenha a soma de 11110101_2 com 110001_2. Qual o número de bits do resultado? O número de bits do resultado é sempre superior ao número de bits do maior dos números a somar?

R:

parcela 1		1	1	1	1	0	1	0	1
parcela 2				1	1	0	0	0	1
soma	1	0	0	1	0	0	1	1	0
transporte		1	1	1	1	0	0	0	1

O resultado é $11110101_2 + 110001_2 = 100100110_2$

O resultado tem 9 bits. O resultado da soma de 2 números de n e m bits, em que $n>m$ é sempre n ou $n+1$ bits.

b) Obtenha a soma de $1A72F0_{16}$ com $D81B_{16}$.

R:

parcela 1	1	A	7	2	F	0
parcela 2			D	8	1	B
soma	1	B	4	B	0	B
transporte		0	1	0	1	0

c) Obtenha a multiplicação de 1110101_2 com 101_2.

R:

```
   1110101
 x     101
   -------
   1110101
  0000000
 1110101
 ---------
1001001001
```

Problema 4

Considere os seguintes números representados em base 10:

$$A = 27$$

$$B = -27$$

$$C = 106$$

$$D = -100$$

a) Represente-os na notação de complemento para 2 com 6 bits. Consegue representá-los todos?

R: Método mais rápido: partindo do bit mais à direita manter o número original até encontrar um '1'. A partir daí complementar bit a bit. Por exemplo, para A=27 mantém-se o '1' mais à direita e a partir daí complementam-se todos os bits.

A = 011011

B = 100101

C e D não se podem representar porque estão fora do intervalo que se consegue representar em complemento para 2 com 6 bits = $[-2^{n-1},2^{n-1}-1]=[-32,+31]$

b) Represente-os agora na notação de complemento para 2 com 8 bits.

R:

A = 00011011

B = 11100101

C = 01101010

D = 10011100

c) Repita para 16 bits.

R: Partindo do resultado da alínea anterior é só acrescentar '0' (quando o número é positivo) ou '1' (quando o número é negativo) à esquerda até perfazer os 16 bits

d) Qual é a diferença entre representar um número em complemento para 2 e fazer o complemento para 2 de um número?

R: Fazer o complemento para 2 de um número consiste em utilizar o método referido na alínea a). Pode ser aplicado a números positivos ou negativos, obtendo-se sempre um número negativo quando se parte de um positivo ou um positivo quando se parte de um negativo. Representar um número *m* em complemento para 2 com *n* bits consiste em utilizar *m* em binário com *n* bits quando o *m* é positivo, ou fazer o complemento para 2 do módulo de *m* se *m* for negativo.

e) Realize as seguintes operações, partindo da representação dos números em complemento para 2 com 8 bits e conclua e indique, justificando para cada caso, se existe *overflow*:

X=A+D

Y=A+C

Z=B+D

W=C−A

R:
$X = A + D = +27 + (-100)$

A	0	0	0	1	1	0	1	1
D	1	0	0	1	1	1	0	0
soma	1	0	1	1	0	1	1	1
transporte	0	0	0	1	1	0	0	0

O resultado é negativo pois o número negativo tem um módulo maior que o positivo. O resultado da soma está correcto.

Y =A+C=27+106

A	0	0	0	1	1	0	1	1
C	0	1	1	0	1	0	1	0
soma	1	0	0	0	0	1	0	1
transporte	0	1	1	1	1	0	1	0

Somam-se 2 números positivos mas o resultado que se obtém é negativo, logo o resultado não faz sentido e está incorreto. Isto deve-se ao fato de ter ocorrido overflow, i.e., o resultado da soma não pode ser representado em apenas 8 bits. Prova-se que há overflow sempre que os bits de transporte do penúltimo bit é diferente do transporte do último bit.

$Z = B + D = -27 + (-100)$

B	1	1	1	0	0	1	0	1
D	1	0	0	1	1	1	0	0
soma	1	0	0	0	0	0	0	1
transporte	1	1	1	1	1	1	0	0

Somam-se 2 números negativos e o resultado é negativo, logo está correcto.

W =C−A=106 − (+27)= 106 + (−27)

C	0	1	1	0	1	0	1	0
$-A$	1	1	1	0	0	1	0	1
soma	0	1	0	0	1	1	1	1
transporte	1	1	1	0	0	0	0	0

Subtrair 2 números positivos equivale a somar um número com o complemento do outro. Neste caso o número de maior módulo é o positivo, logo o resultado é positivo e está correto.