Sistemas Digitais

Operações Aritméticas Básicas e Representação de Números com Sinal

João Paulo Baptista de Carvalho

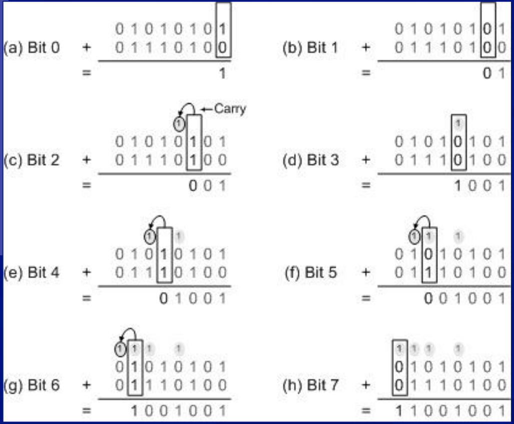
joao.carvalho@inesc-id.pt

TÉCNICO LISBOA

inesc id lisboa

Somas em Base 2 e 16

- Semelhantes às somas em decimal:




```
   5AF1
+  B32D
-------
  10E1E
```

Multiplicações em Base 2 e 16

```
       10110
x       1101
------------
       10110
      00000
     10110
    10110
------------
   100011110
```

```
        A24
x        13
-----------
       1E6C
      A24
-----------
       C0AC
```

Binario	Hexadecimal	Binario	Hexa(decimal)
0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	A (10)
0011	3	1011	B (11)
0100	4	1100	C (12)
0101	5	1101	D (13)
0110	6	1110	E (14)
0111	7	1111	F (15)

TÉCNICO LISBOA

E as subtrações?

- Semelhantes às subtrações em decimal...
  - Mas será que vocês sabem fazer subtrações em decimal?

```
        23
-       15
----------
        08
```

```
          23
-         45
------------
…999999978
```

- É necessário utilizar módulo e sinal: o número de maior módulo tem que ficar sempre no numerador e caso o resultado seja um número negativo tem que se acrescentar ao resultado o sinal "–"

Representação e Aritmética de Números com Sinal

- A representação de números inteiros tem de ter em conta que os números podem ser positivos, negativos ou o número 0
- Uma das alternativas é a representação por módulo e sinal, em que o bit mais significativo indica o sinal:
  - Se esse bit for 1 o número é negativo;
  - Se for 0 é positivo
- Exemplo para números de 4 bits:

Representação	Número representado	Representação	Número representado
0000	0	1000	-0
0001	+1	1001	-1
0010	+2	1010	-2
0011	+3	1011	-3
0100	+4	1100	-4
0101	+5	1101	-5
0110	+6	1110	-6
0111	+7	1111	-7

Representação por módulo e Sinal

- Inconvenientes:
  - Duas representações diferentes para o zero;
  - O módulo e o sinal são processados de forma diferente;
  - É necessário escolher a operação a realizar de acordo com a operação desejada e o sinal dos números envolvidos.
- Por exemplo:
  - Se pretendermos fazer a operação (+5) + (-3) o que é realmente necessário fazer é a subtracção 5-3 ficando o sinal positivo;
  - Se o problema for realizar (-5) + (+3) então há que realizar também uma subtracção mas do módulo do número negativo menos o do positivo sendo o resultado um número negativo.
- Obviamente tudo isto complica a realização das operações e consequentemente dos circuitos que tenham que realizar essas operações

Representação em Complemento para 2

- Chama-se complemento para 2 de um número *x* de *n* bits, ao resultado da operação $2^n - x$
- Por exemplo, o complemento para 2 de 0110 é:

$$\begin{array}{r} 10000 \\ \underline{-\ 0110} \\ 1010 \end{array}$$

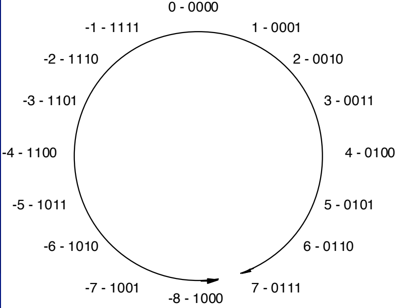
- Se um número *x* tem *n* bits, então o seu complemento para 2 é representado por *n* bits
- O complemento para 2 do complemento para 2 de um número *x*, é *x*:
  - $2^n - (2^n - x) = x$
- Formas alternativas de encontrar o complemento para 2 de um número *x*:
  - Inverter todos os bits de *x* e somar 1 ao resultado
    - 0110 → 1001 →1001+1 = 1010
  - Manter todos os 0's menos significativos e ainda o 1 menos significativo de *x*, e inverter os restantes bits mais significativos
    - 0110 → xx10 → 1010

Representação de números com sinal em Complemento para 2

- Na representação de números com sinal em complemento para 2, o bit mais significativo do número também indica o sinal:
  - Se for 1 o número é negativo;
  - Se for 0 é positivo.
- Na representação de números com sinal em complemento para 2:
  - Um número positivo é representado pelo seu módulo;
  - Um número negativo é representado pelo complemento para 2 do seu módulo.
- Por exemplo:
  - O número +6 é representado em notação de complemento para 2 com 4 bits por 0110;
  - O número -6 é representado por 1010, pois:
    - 6 = 0110 ► complementando bit a bit, 1001 ►1001 +1 = 1010 = -6
- Repare-se que ao calcular o complemento para 2 de um número positivo de *n* bits se obtém automaticamente o bit de sinal a 1

Representação de números com sinal em Complemento para 2 (II)

- Os 16 números possíveis de representar em complemento para 2 com 4 bits são os seguintes:



- O intervalo representado é $[-2^{n-1}, +2^{n-1}-1]$
  - Com 4 bits: [-8,+7]
- A razão da assimetria entre o total de número de positivos e o de negativos radica na necessidade de representar o '0' e de não ter duas representações para o '0'
- Uma forma alternativa para calcular o valor (decimal) de um número representado em complemento para 2 consiste em dar peso negativo ao bit mais significativo quando se faz a conversão para decimal. E.g.:
  - $1010 = -1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = -8+2 = -6$

Representação de números com sinal em Complemento para 2 (III)

- Com esta representação, pode operar-se sobre os números sem ter que tomar em consideração qualquer particularidade relacionada com o sinal de cada um deles. Exemplos:

Soma de 2 positivos

(+2) + (+5) = 7

0010
0101
0111

Soma de 2 negativos

(-2) + (-5) = -7

1110
1011
11001

Soma de 1 positivo com 1 negativo com resultado positivo

(+5) + (-3) = +2

0101
1101
10010

Soma de 1 positivo com 1 negativo com resultado negativo

(+2) + (-5) = -3

0010
1011
1101

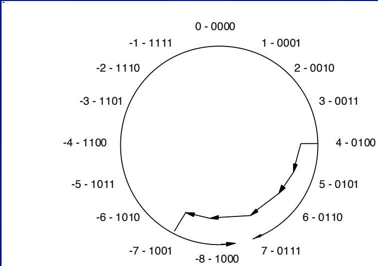
Ignora-se o transporte porque sai dos 4 bits utilizados na representação

Representação de números com sinal em Complemento para 2 (IV)

- Quando a operação envolve 2 números com o mesmo sinal, é possível que o resultado não possa ser representado com o número de bits disponível. A esta situação chama-se *OVERFLOW*
- Por exemplo, 4 + 5 = 9, que não é representável com 4 bits em notação de complemento para 2 com sinal:

$$\begin{array}{r} \color{red}{01} \\ 0100 \\ \underline{0101} \\ 1001 \end{array}$$

O resultado é incoerente pois é um número negativo: (-7)



- O *overflow* nunca ocorre em operações entre números com sinal contrário.
- Prova-se que o *overflow* ocorre sempre que o transporte do último bit é diferente do transporte do penúltimo bit

Bibliografia

- Arroz,G., Monteiro,J.C., Oliveira,A., "Arquitectura de Computadores – Dos Sistemas Digitais aos Microprocessadores", Capítulo 1, 2ª Edição, IST Press, 2009