Sistemas Digitais

Minimização de Funções: Mapas de Karnaugh

João Paulo Baptista de Carvalho

joao.carvalho@inesc-id.pt

Minimização de uma Função

- Trata-se de obter a expressão mínima de uma função
- A representação mínima depende do critério utilizado: usaremos como critério o número de termos na expressão e o número de literais nos termos
- Presume-se a representação de uma função a dois níveis, isto é numa das formas normais
- Pode existir mais do que uma expressão mínima
- A minimização por utilização dos teoremas é possível (como vimos nas aulas anteriores), mas é por vezes difícil e carece de experiência
- Pretende-se mostrar nesta aula que há métodos tabulares interessantes para simplificar funções booleanas

Adjacências e Mapas de Karnaugh (I)

- Uma função pode ser representada de várias formas:

m	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$f = m_7 + m_6 + m_4$$

$$f = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}$$

- A expressão da função pode ser simplificada algebricamente:

$$\begin{aligned} f &= ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} \\ &= ABC + AB\overline{C} + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} \\ &= AB\left(C + \overline{C}\right) + A\overline{C}\left(B + \overline{B}\right) \\ &= AB + A\overline{C} \end{aligned}$$

- Do mesmo modo que a representação de funções pode ser feita indiferentemente de uma forma tabular ou com uma expressão algébrica, o próprio processo de simplificação pode ser feito dos dois modos

Adjacências e Mapas de Karnaugh (II)

m	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$
\begin{aligned}
f &= ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} \\
&= ABC + AB\overline{C} + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} \\
&= AB\left(C + \overline{C}\right) + A\overline{C}\left(B + \overline{B}\right) \\
&= AB + A\overline{C}
\end{aligned}
$$

- As linhas 6 e 7 permitiram por obter o termo AB por manipulação algébrica: entre elas só a variável C é que varia, o que permitiu por AB em evidência
- As linhas 4 e 6 permitiram por obter o termo $A\overline{C}$ por manipulação algébrica: entre elas só a variável B é que varia, o que permitiu por $A\overline{C}$ em evidência

Adjacências e Mapas de Karnaugh (III)

m	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$\begin{aligned} f &= ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} \\ &= ABC + AB\overline{C} + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} \\ &= AB\left(C + \overline{C}\right) + A\overline{C}\left(B + \overline{B}\right) \\ &= AB + A\overline{C} \end{aligned}$$

- Podemos então simplificar directamente a função por observação da tabela, **associando linhas em que a função seja 1 e que difiram apenas de uma variável**: No primeiro produto associámos as linhas 6 e 7 que diferem apenas na variável C; no segundo associámos 4 e 6 que diferem apenas na variável B

- <u>Destas linhas que diferem apenas de uma variável, diz-se serem **adjacentes**</u>.
- É claro que era bom, como aconteceu no primeiro caso, que todas as posições adjacentes estivessem fisicamente encostadas. Mas, com 3 variáveis, cada posição tem sempre 3 posições adjacentes e, na tabela, é impossível colocar fisicamente uma linha "encostada" a outras três.

Adjacências e Mapas de Karnaugh (IV)

- Esta nova forma de desenhar a tabela é o **Mapa de Karnaugh**

m	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

- Repare-se que para cada posição há 3 adjacentes:

A \ BC	00	01	11	10
0		A2		
1	A1	P	A3	

A \ BC	00	01	11	10
0				A2
1	A3		A1	P

- A posição P tem como posições adjacentes a posição A1 (que varia de P na variável C), a posição A2 (que varia na variável A), e a posição A3 (que varia na B)
- Repare-se que tudo se passa como se as posições laterais extremas estivessem encostadas

Adjacências e Mapas de Karnaugh (V)

m	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$
\begin{aligned}
f &= ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}\\
&= ABC + AB\overline{C} + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}\\
&= AB\left(C + \overline{C}\right) + A\overline{C}\left(B + \overline{B}\right)\\
&= AB + A\overline{C}
\end{aligned}
$$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

- Aplicando o Mapa de Karnaugh à função do exemplo anterior temos:

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1

$A\overline{C}$

$F = AB + A\overline{C}$

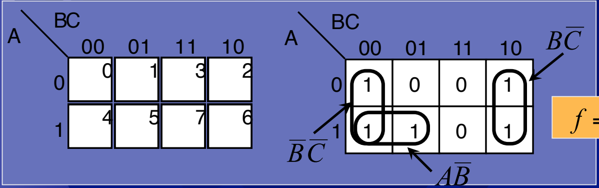
AB

- Num mapa de Karnaugh são válidas todas as associações entre 2 elementos adjacentes

Adjacências e Mapas de Karnaugh (VI)

- Outro exemplo de simplificação de uma função de 3 variáveis:

$$f = \sum m(0,2,4,5,6) \Leftrightarrow f = m_0 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6$$

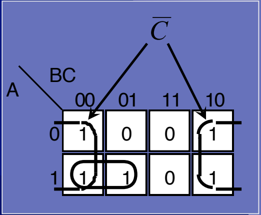


$$f = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}$$

- Mas a expressão pode ser ainda mais simplificada:

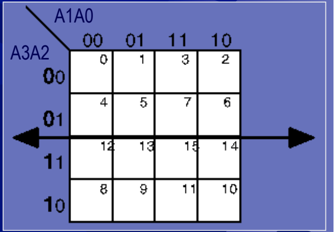
$$f = A\overline{B} + \overline{C}$$

- Esta simplificação adicional poderia ser retirada directamente do mapa, pois verifica-se que os quatro ‘1s’ das pontas são adjacentes: entre eles só C é constante



Mapas de Karnaugh (4 variáveis)

- O Mapa de Karnaugh foi apresentado para 3 variáveis mas em teoria pode ser usado com qualquer número de variáveis
- Na prática, com mais de 6 variáveis torna-se bastante difícil, existindo métodos mais adequados (que também assentam nos princípios do método agora apresentado)
- O Mapa a 4 variáveis constrói-se facilmente. A partir de um Mapa de 3 variáveis, replica-se o quadro através de uma reflexão num espelho imaginário:

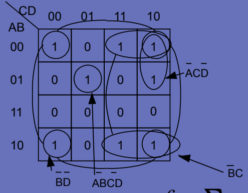


Mapas de Karnaugh (4 variáveis) - II

- Preenchimento e agrupamentos válidos de mintermos em mapas de 4 variáveis – Exemplos:

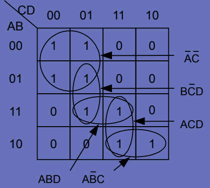
	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$$f = \sum m(0,2,3,5,6,8,10,11)$$



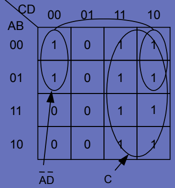
São válidos os agrupamentos de 2^1 até 2^4 quadrados adjacentes

$$f = \sum m(0,1,4,5,10,11,13,15)$$



Agrupamentos de 2^n quadrados correspondem à eliminação de *n* literais

$$f = \sum m(0,2,3,4,6,7,10,11,14,15)$$



Método de Karnaugh

- Exemplo: $f = \sum m(1,5,6,7,11,12,13,15)$

AB\CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

- À primeira vista pareceria intuitivo começar a simplificação pelo agrupamento dos quatro 1's centrais de modo a eliminar variáveis...

AB\CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

- ...mas essa opção levaria à obtenção do termo BD, o qual é desnecessário e não está presente na forma mínima da expressão da função. Todos os '1s' que formam BD também pertencem a outros agrupamentos indispensáveis à expressão da função:

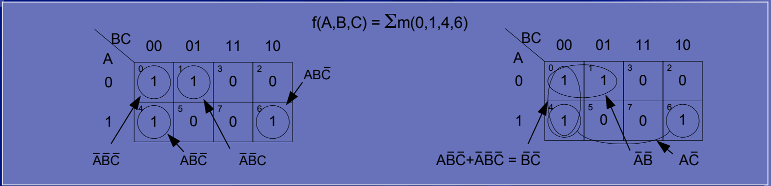
$$f = \cancel{BD +} \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{A}BC + AB\overline{C} + ACD$$

AB\CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

- Nem sempre estas situações são facilmente detectáveis. Para que o método de Karnaugh seja correctamente entendido e aplicado, torna-se necessário introduzir e aplicar um conjunto de conceitos e procedimentos que apresentaremos de seguida

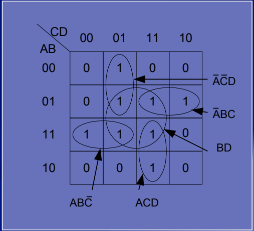
Implicantes

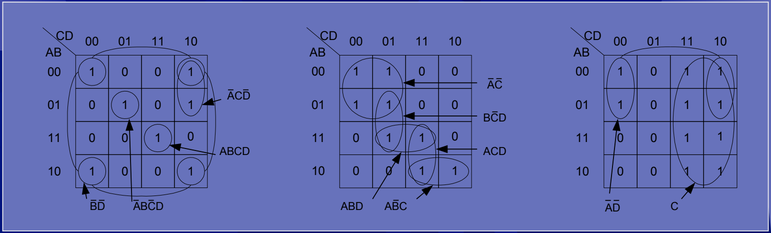
- Chama-se implicante de uma função a um agrupamento de ‘1’s que satisfaz as regras da associação de mintermos (adjacência e associação de 2^n mintermos)
- Para funções das mesmas variáveis, diz-se que uma função F1 implica outra F2, quando, para todas as configurações de entrada em que a função F1 vale 1, a função F2 também vale 1.
- Um **termo de produto** diz-se um **implicante** de função sse essa função assumir o valor ‘1’ para todos os mintermos que constituem esse termo de produto
- Ou seja, <u>qualquer mintermo, ou agrupamento válido de mintermos é um implicante da função</u>



Implicantes Primos (IP)

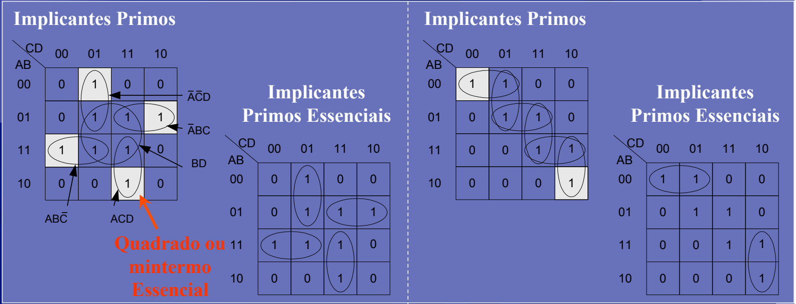
- Um termo de produto diz-se um implicante primo (IP) se a remoção de um qualquer literal desse termo de produto resulta num termo de produto que não é um implicante da função
- Ou seja, um IP é agrupamento válido de mintermos que não pode ser alargado
- Exemplos:





Implicantes Primos Essenciais (IPE)

- Um implicante primo de uma função diz-se implicante primo essencial se contém pelo menos um mintermo que não está contido em nenhum outro implicante primo
- Ou seja, um IPE é um IP que contém pelo menos um mintermo que não pode ser associado de outra forma
- Exemplos:



Implicantes Primos (IP) e Implicantes Primos Essenciais (IPE)

- IMPLICANTE: Um termo de produto diz-se um implicante de uma função se e só se essa função assume o valor "1" para todos os mintermos que o constituem
- IMPLICANTE PRIMO: Um termo de produto diz-se um implicante primo se a remoção de um qualquer literal desse termo de produto resulta num termo de produto que não é um implicante da função
- IMPLICANTE PRIMO ESSENCIAL: Um implicante primo de uma função diz-se implicante primo essencial se contém pelo menos um mintermo não contido em nenhum outro implicante primo

Algoritmo de Minimização de Karnaugh

- O procedimento sistemático para a obtenção da expressão simplificada de uma função representada num quadro de Karnaugh, corresponde à execução dos 3 seguintes passos:

Passo 1: Identificar e seleccionar todos os implicantes/implicados primos essenciais (IPE's)

a) Analizar cada mintermo/maxtermo

b) Para cada mintermo essencial encontrado assinalar o IPE correspondente

c) Repetir até que todos os mintermos/maxtermos tenham sido analizados, OU já não existam mintermos/maxtermos que não estejam incluídos num IPE

Passo 2: Caso existam mintermos/maxtermos que não foram seleccionados no passo anterior, determinar o menor conjunto de implicantes/implicados primos (IP's) que os contenham

Passo 3: Escrita da expressão simplificada como soma/produto de todos os termos de produto/soma seleccionados nos passos 1 e 2.

Forma Normal/Mínima Disjuntiva

- Exemplo de simplificação para obtenção da forma normal/ mínima disjuntiva
  - Funções cuja simplificação apenas involve IPE

A \ BC	00	01	11	10
0	1 (0)	1 (1)	0 (3)	0 (2)
1	1 (4)	0 (5)	0 (7)	1 (6)

$\bar{A}\bar{B}$ $A\bar{C}$

$f(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$

m1 e m6 são quadrados essenciais

$f(A,B,C) = \bar{A}\bar{B} + A\bar{C}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0 (0)	1 (1)	0 (3)	0 (2)
01	0 (4)	1 (5)	1 (7)	1 (6)
11	1 (12)	1 (13)	1 (15)	0 (14)
10	0 (8)	0 (9)	1 (11)	0 (10)

$\bar{A}\bar{C}D$ $\bar{A}BC$ $AB\bar{C}$ ACD

$f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + \bar{A}BC\bar{D}$
$+ AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + ABCD + A\bar{B}CD$

m1, m6, m12 e m11 são quadrados essenciais

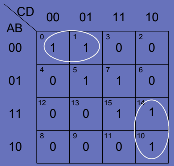
$f(A,B,C,D) = AB\bar{C} + ACD + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{C}D$

- A expressão simplificada é dada pela soma de todos os IPE's (o passo 2 não foi necessário)

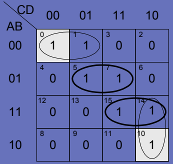
Forma Normal/Mínima Disjuntiva

- Exemplo de simplificação para obtenção da forma normal/ mínima disjuntiva
  - Funções cuja simplificação involve IPEs e IPs
  - Q: Será que é possível não existirem IPE's?

$f(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,5,7,10,14,15)$
$= \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD$
$+ A\bar{B}C\bar{D} + ABC\bar{D} + ABCD$

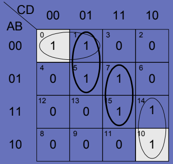


O conjunto de implicantes primos essenciais é único; m0 e m10 são quadrados essenciais



$f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BD + ABC + AC\bar{D}$

O conjunto de implicantes primos não essenciais que completam a expressão simplificada oferece outras alternativas além das apresentadas



$f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}D + BCD + AC\bar{D}$

Método de Karnaugh – Simplificação com Indiferenças

- Por vezes acontece que certas configurações de entradas nunca ocorrem numa função lógica
- É possível tirar partido desse facto para se tentar minimizar ainda mais a expressão algébrica da função
- Vejamos através de um exemplo qual a metodologia a utilizar nestas situações:
  - Pretende-se obter uma função que deve dar saída ‘1’ apenas quando o número representado for múltiplo de 3, e que tem como variáveis de entrada os quatro bits de uma representação em código BCD
  - Podemos fazer a tabela de verdade da função pretendida, utilizando como variáveis de entrada A3, A2, A1 e A0, representando os quatro bits do código BCD

Método de Karnaugh – Simplificação com Indiferenças (II)

- Detecção de múltiplos de 3 em BCD: Tabela de verdade

BCD	A3	A2	A1	A0	F	Observações
0	0	0	0	0	0	Não é múlt. de 3
1	0	0	0	1	0	Não é múlt. de 3
2	0	0	1	0	0	Não é múlt. de 3
3	0	0	1	1	1	Múltiplo de 3
4	0	1	0	0	0	Não é múlt. de 3
5	0	1	0	1	0	Não é múlt. de 3
6	0	1	1	0	1	Múltiplo de 3
7	0	1	1	1	0	Não é múlt. de 3
8	1	0	0	0	0	Não é múlt. de 3
9	1	0	0	1	1	Múltiplo de 3
-	1	0	1	0	X	Não é BCD
-	1	0	1	1	X	Não é BCD
-	1	1	0	0	X	Não é BCD
-	1	1	0	1	X	Não é BCD
-	1	1	1	0	X	Não é BCD
-	1	1	1	1	X	Não é BCD

- No caso das configurações de entrada que não são BCD, não é importante considerar o valor da função, uma vez que as configurações de entrada respectivas nunca ocorrem e, portanto, o valor que a função teria nessa situação é indiferente

Método de Karnaugh – Simplificação com Indiferenças (III)

- Detecção de múltiplos de 3 em BCD: Simplificação ignorando a existência de indiferenças

A3 A2 \ A1 A0	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	0	1
11	0	0	0	0
10	0	1	0	0

$$F = \overline{A3}\,\overline{A2}\,A1\,A0 + \overline{A3}\,A2\,A1\,\overline{A0} + A3\,\overline{A2}\,\overline{A1}\,A0$$

- A expressão obtida considerando as indiferenças é muito mais simples

- Detecção de múltiplos de 3 em BCD: Simplificação considerando a existência de indiferenças – considera-se que uma indiferença vale '1' quando dá jeito, e '0' nas outras situações

A3 A2 \ A1 A0	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	0	1
11	X	X	X	X
10	0	1	X	X

$$F = A3\,A0 + A2\,A1\,\overline{A0} + \overline{A2}\,A1\,A0$$

- Tenha-se em conta que a função descrita pela expressão obtida, deixou de ter posições indefinidas. <u>As configurações de variáveis de entrada correspondentes às indiferenças que foram associadas com mintermos da função passaram a provocar saída "1" da função. Aquelas não associadas passaram a ter saída "0"</u>

Mapas de Karnaugh (5 variáveis)

- A obtenção de mapas de karnaugh de 5 variáveis faz-se a partir de um mapa de 4 variáveis da mesma forma que este se obteve a partir de um mapa de 3 variáveis. Assumindo ‘A’ como variável de maior peso, temos:

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

- De notar que existem muitas formas possíveis e equivalentes de desenhar e numerar o mapa

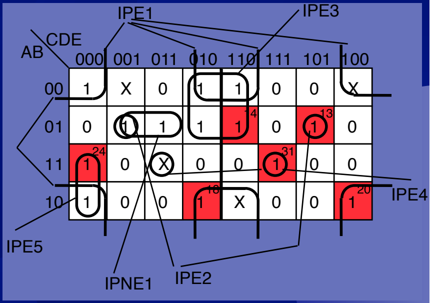
- Para além de todas as adjacências válidas no mapa de 4 variáveis (em cada uma das “metades”) existem agora adjacências entre posições simétricas em relação ao eixo de simetria vertical (cada quadrado tem 5 quadrados adjacentes)

Mapas de Karnaugh (5 variáveis) – Exemplo de minimização:

$$f = \sum m(0,2,6,9,10,11,13,14,16,18,20,24,31), \text{indiferenças em}(1,4,22,27)$$

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0: 1	1: X	3:	2: 1	6: 1	7:	5:	4: X
01	8:	9: 1	11: 1	10: 1	14: 1	15:	13: 1	12:
11	24: 1	25:	27: X	26:	30:	31: 1	29:	28:
10	16: 1	17:	19:	18: 1	22: X	23:	21:	20: 1

Inválido



IPE's:

1 devido a m18 e a m20

2 devido a m13

3 devido a m14

4 devido a m31

5 devido a m24

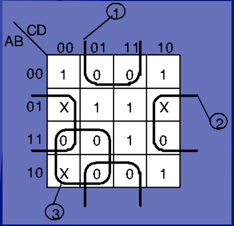
$$f = \overline{B}\,\overline{E} + \overline{A}B\overline{D}E + \overline{A}D\overline{E} + ABDE + A\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}B\overline{C}E$$

IPE1 IPE2 IPE3 IPE4 IPE5 IPNE1

Simplificação através de Maxtermos (‘0’s)

- Do mesmo modo que se usam associações de mintermos para obter expressões em termos de somas de produtos (forma normal disjuntiva), é possível associar maxtermos – identificados por ‘0’, obtendo expressões em termos de produtos de somas (forma normal conjuntiva):

$$f = \prod M(1,3,9,11,12,13,14), \text{indiferenças em}(4,6,8)$$



- Recorde-se que, quando se “lêem” somas nos mapas de Karnaugh (ou nas tabelas) as variáveis que se mantêm em “0” são lidas afirmadas e as que se mantêm em “1” são lidas negadas

$$f = \underbrace{(B+\overline{D})}_{1}\underbrace{(\overline{B}+D)}_{2}\underbrace{(\overline{A}+C)}_{3}$$

- É de notar que o facto de se representar a função como um produto de maxtermos na sua especificação, não significa que ela tenha de ser simplificada em termos de uma expressão na forma de produto de somas. De facto, nada nos impediria de fazer a simplificação através dos 1’s do mapa de Karnaugh...

Bibliografia

- Arroz,G., Monteiro,J.C., Oliveira,A., "Arquitectura de Computadores, dos Sistemas Digitais aos Microprocessadores", Capítulo 2.3, 2ª Edição, 2009
- Mano,M., Kime,C. – "Logic and Computer Design Fundamentals", Prentice Hall, secções 2.4,2.5
- Sêrro,C. – "Sistemas Digitais: Fundamentos Algébricos", IST Press, 2003 , secções 7.1 a 7.5