

Cálculo Diferencial e Integral I

2^o teste - LEIC-T, LEE, LETI, LEGI - versão B - duração: 45 minutos

13 de dezembro de 2022 - 18:15 horas

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{-1-2x}, & \text{se } x > 0; \\ (2x+1)e^{-x^2}, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

- (i) Determine, caso existam, os intervalos de monotonia e extremos relativos de f em \mathbb{R}^- .
- (ii) Determine o polinómio de Taylor de 2^o grau em potências de $x-2$ que aproxima a função f em $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$.
- (iii) Escreva a fórmula de Taylor de 2^a ordem em potências de $x-2$ com resto de Lagrange e encontre um majorante para o erro cometido ao aproximar a função f pelo polinómio descrito em (ii) no intervalo $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$.

2. Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^2)}{x^2 - \sin x}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

3. Determine uma primitiva para cada uma das seguintes funções:

$$(i) \frac{e^x + \cos x}{(e^x + \sin x)^2}, \quad (ii) \ln(x+1), \quad (iii) \frac{1}{x(2 + \sqrt{x})}.$$

4. Determine a função $g :]-2, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{e} \quad g(0) = 2.$$

5. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, tais que $a < b$, e $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável. Mostre que se

$$\sqrt{\frac{b}{a}} h(b) - h(a) = 0$$

então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$h(c) = -h'(c) 2c$$