# Cálculo Diferencial e Integral I

*2ºteste - LERC, LEGI, LEE, LEIC-T*

**19 de junho de 2021 - 11h30**

---

**I (12,5 val.)**

**1.** (5,5 val.) Determine os seguintes integrais:

$$\text{i)} \int_0^1 \frac{x\ \ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx\ , \quad \text{ii)} \int_0^1 2(x+1)\operatorname{arctg} x\,dx\,, \quad \text{iii)} \int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx.$$

**Resolução.**

$(i)$ Da formula de Barrow tem-se

$$\int_0^1 \frac{x\ln(1+x^2)}{x^2+1}\,dx \;=\left[\frac{\ln^2(1+x^2)}{4}\right]_0^1 = \frac{\ln^2(2)}{4}\,.$$

$(ii)$ Integrando por partes,

$$\int_0^1 2(x+1)\operatorname{arctg} x\,dx = \left[(x+1)^2\operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$\pi - \int_0^1 1+\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \pi - \left[x+\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \pi-1-\ln 2\,.$$

$(iii)$

A função integranda $\dfrac{x}{x^2+3x+2}$ é uma função racional própria que se decompõe em fracções simples, obtendo-se a igualdade seguinte para o integral,

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx = A\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + B\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx$$

A determinação das constantes $A, B$ é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

$$x = A(x+2)+B(x+1)\,, \quad \text{ou seja} \quad x+0 = (A+B)x+(B+2A)x$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=0 \end{cases}$$

obtendo-se $A=-1,\ B=2$, e da fórmula de Barrow vem

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx = \int_0^1 \frac{-1}{x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{2}{x+2}\,dx = -\left[\ln|x+1|\right]_0^1 + 2\left[\ln|x+2|\right]_0^1 = -\ln 2 + 2\ln 3 - 2\ln 2$$

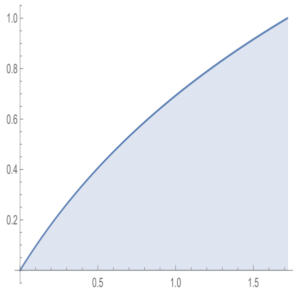
▪

**2.** (3 val.) Designe-se por $A$ a região limitada pelas linhas de equação

$$y = \ln(x+1)\,, \qquad y = 0\,, \qquad x = e-1.$$

Esboce graficamente a região $A$ e calcule a sua área.

**Resolução.**
A figura descreve a região em questão




De $\ln(x+1) = 0$ tem-se $x = 0$, obtendo-se a seguinte expressão para área da região plana

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1)\; dx\; = 1$$

uma vez que $P(\ln(x+1)) = x\ln(x+1) - P(\frac{x}{1+x}) = x\ln(x+1) - P(1 - \frac{1}{1+x}) = x\ln(x+1) - x + \ln(x+1)$, da fórmula de Barrow tem-se

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1); dx = [\ln(x+1) - x + \ln(x+1)]_0^{e-1} = 1\,.$$

∎

**3.** (4 val.) Seja a função

$$G(x) = \int_0^{2x} (x+1)\, e^{t^2}\, dt\;, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

i) Defina a função derivada de $G$.

ii) Indique o polinómio de Taylor de $2^{\text{o}}$ grau em potências de $x$ associado à função $G$.

**Resolução.** *i)* A função $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} e^{t^2}\, dt$ é um integral indefinido cujo integrando é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e portanto $F$ é diferenciável do teorema fundamental do cálculo. Como $G(x) = (x+1)F(2x)$, resulta $G$ diferenciável, do produto e composição de funções diferenciáveis.
A função derivada de $G$ é definida por $G' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e

$$G'(x) = ((x+1)F(2x))' = F(2x) +\, 2(x+1)e^{4x^2}\,.$$

*ii)* $G(0) = 0$ . A função $G$ é pelo menos 2 vezes diferenciável em $\mathbb{R}$,

$$G''(x) = (F(2x) +\, 2(x+1)e^{4x^2})' = (2e^{4x^2}) + 2e^{4x^2} + 16x(x+1)e^{4x^2}$$

O polinómio de Taylor de $2^{\text{o}}$ grau em potências de $x$ associado à função $G$ é

$$P_2(x) = G(0) + G'(0)x + G''(0)\frac{x^2}{2}\,.$$

com $G(0) = 0\,, G'(0) = 2\,, G''(0) = 4$.

∎

**II (7,5 val.)**

**1.** (4 val.) Analise a natureza de cada uma das séries seguintes e no caso de convergência, indique a soma de uma delas

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(1-\pi)^n} \quad , \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n(n+3)+n} \quad , \quad \text{iii)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{3^n(n+1)!}.$$

**Resolução.** *i)* A série $2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{1-\pi}\right)^n$ é convergente, pois é uma série geométrica de razão $R = \frac{2}{1-\pi}$ com $|R| < 1$ e tem soma

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{1-\pi}\right)^n = 2\frac{\frac{2}{1-\pi}}{1-\frac{2}{1-\pi}} = \frac{4}{-1-\pi}.$$

*ii)* Considerem-se as sucessões $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n(n+3)+n}$ e $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Tem-se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in \mathbb{R}^+$. Do critério de comparação as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = \frac{3}{2} > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n(n+3)+n}$ é também convergente.

*iii)*

Considere-se a sucessão $a_n = \frac{n^{n+1}}{3^n(n+1)!}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+2}}{3^{n+1}(n+2)!}\frac{3^n(n+1)!}{n^{n+1}} = \frac{(n+1)^{n+2}}{3(n+2)n^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{(n+1)^2}{3(n+2)n}$$

Tem-se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{3} < 1$. Do critério de D'Alembert a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

■

**2.** (1,5 val.) Determine o maior intervalo aberto de $\mathbb{R}$ onde é absolutamente convergente a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}(x+2)^{n+1}$$

**Resolução.**

Tem-se para o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}(x+2)^{n+1}$

$$r = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1(n+1)}}{2^n n} = 2$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}(x+2)^{n+1}$ converge absolutamente para $-2 < x+2 < 2$. O intervalo $]-4, 0[$ é o maior intervalo aberto onde a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}(x+2)^{n+1}$ é absolutamente convergente.

■

**3.** (2 val.) Supondo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de termos positivos, indique, justificando, qual a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos(a_n) - 1)$$

.

**Resolução.** A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente então $\lim a_n = 0$. Consideremos a série de termos não negativos $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos(a_n))$. Em $\mathbb{R}$ através da regra de Cauchy pode obter-se

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =_{\frac{0}{0}}= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Assim para toda a sucessão não nula $a_n \to 0$ tem-se

$$\frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} \to \frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$$

pelo critério de comparação as séries $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos a_n)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ são da mesma natureza.

Já a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ é convergente pelo critério geral de comparação, uma vez que, $\lim a_n = 0 \Rightarrow a_n < 1, \ \forall n > m$, tem-se $a_n^2 < a_n$ , $\forall n > m$ .

∎