Cálculo Diferencial e Integral I

2ºteste - LEIC-T, LEE, LETI, LEGI - versão A - duração: 45 minutos

17 de dezembro de 2022 - 9:00 horas

---

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (1+2x)e^{-x^2}, & \text{se } x \le 0; \\ \frac{1}{1+2x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(i) Determine, caso existam, os intervalos de monotonia e extremos relativos de f em $\mathbb{R}^-$.

$$f'(x) = \left((1+2x)e^{-x^2}\right)' = \left(-2e^{-x^2}\right)\left(2x^2+x-1\right) = \left(-2e^{-x^2}\right)\left(2(x+1)(x-\frac{1}{2})\right)$$

$f'(x) = 0$ para $x = -1$.
$f'(x) < 0$ para $-\infty < x < -1$, sendo f uma função estritamente decrescente em $]-\infty, -1[$
$f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$, sendo f uma função estritamente crescente em $]-1, 0[$ e sendo f contínua
$f(-1)$ é um minímo local.

(ii) Determine o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de $x-1$ que aproxima a função f em $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1+2x}\right)' = \frac{-2}{(1+2x)^2} \qquad f''(x) = \left(\frac{-2}{(1+2x)^2}\right)' = \frac{8}{(1+2x)^3}$$

sendo o polinómio de Taylor em potências de $(x-1)$

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!} = \frac{1}{3} + \frac{-2}{9}(x-1) + \frac{4}{3^3}(x-1)^2.$$

(iii) Escreva a fórmula de Taylor de 2ª ordem em potências de $x-1$ com resto de Lagrange e encontre um majorante para o erro cometido ao aproximar a função f pelo polinómio descrito em (ii) no intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

$$f'''(x) = \left(\frac{8}{(1+2x)^3}\right)' = \frac{-16.3}{(1+2x)^4}$$

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x) = P_2(x) + f'''(c)\frac{(x-1)^3}{3!} \qquad \text{com } c \text{ entre } 1 \text{ e } x$$

Para $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ ou seja $|x-1| \le \frac{1}{2}$,

$$|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| = \left|f'''(c)\frac{(x-1)^3}{3!}\right| = \left|\frac{-16.3}{(1+2c)^4}\right| \frac{|x-1|^3}{3!}$$

sendo $c > \frac{1}{2}$ vem que $1 + 2c > 2$ ou seja $\frac{1}{1+2c} < \frac{1}{2}$

$$|R_2(x)| = \frac{8}{(1+2c)^4}\,|x-1|^3 < \frac{8}{2^4}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16}\,.$$

2. Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites:

$$(i)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2-\operatorname{sen} x}, \qquad (ii)\ \lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{x}}\ .$$

(i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2-\operatorname{sen} x} = 0,$$

da regra de Cauchy, uma vez que

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x^2))'}{(x^2-\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x-\cos x} = \frac{0}{0-1} = 0$$

(ii)

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

de facto, uma vez que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}}$$

e da regra de Cauchy, pois

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1/x}{1+1/x^2}}{=}\frac{0}{1+0} = 0$$

3. Determine uma primitiva para cada uma das seguintes funções:

$$(i)\ \frac{e^x+\cos x}{e^x+\operatorname{sen} x} \quad , \qquad (ii)\ 2x\arctan(x) \quad , \qquad (iii)\ \frac{1}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}\,.$$

(i) É uma primitiva imediata, $P\left(\dfrac{e^x+\cos x}{e^x+\operatorname{sen} x}\right) = \ln\left(e^x+\operatorname{sen} x\right).$

(ii) Primitivando por partes $2x\arctan(x)$, obtém-se

$$P\left(2x\arctan(x)\right) = x^2\arctan(x) - P\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

uma vez que

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \qquad P\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = x - \arctan(x)$$

$$P\left(2x\arctan(x)\right)=x^2\arctan(x)-x+\arctan(x)\,.$$

(iii) Seja $f(x)=\dfrac{1}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$ Usando a substituição $\sqrt{x}=t$, tem-se $\phi(t)=t^2$ obtém-se assim a primitiva

$$P\left(f(\phi(t))\phi'(t)\right)=P\left(\frac{1}{t^2\left(t+1\right)})2t\right)=P\left(\frac{2}{t\left(t+1\right)})\right)$$

A função $\dfrac{2}{t(t+1)}$ é uma função racional própria que se decompõe em fracções simples obtendo-se a igualdade seguinte ,

$$P\left(\frac{2}{t(t+1)}\right)=P\left(\frac{A}{t}\right)+P\left(\frac{B}{t+1}\right)=A\ln t+B\ln(t+1)$$

A determinação das constantes A, B é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

$$\frac{2}{t(t+1)}=\frac{A(t+1)}{t(t+1)}+\frac{Bt}{t(t+1)}$$

$$0t+2=(A+B)t+A\,.$$

Obtém-se $A=2,\ B=-2$, e

$$P\left(\frac{2}{t(t+1)}\right)=2\ln t-2\ln(t+1)=2\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)$$

Assim conclui-se que

$$P\left(\frac{1}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)=2\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$$

4. Determine a função $g:]-3,3[\to\mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\quad \text{e} \qquad g(0)=1\,.$$

$\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$

A expressão geral para todas as primitivas de g é: $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)\quad+C$, com $C\in\mathbb{R}$. da condição $g(0)=1$ tem-se que $1=\operatorname{arcsen}0+C$. Assim $g(x)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)\quad+1$ é a função que satisfaz ambas as condições.

5. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, tais que $a < b$, e $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável. Mostre que se

$$\sqrt{\frac{b}{a}}\, h(b) - h(a) = 0$$

então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$h(c) = -h'(c)\, 2c$$

Sendo $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável, a função $w(x) = \sqrt{x}h(x)$ para $x \in \mathbb{R}^+$ é igualmente contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^+$
Sendo $a, b \in \mathbb{R}^+$, tais que $a < b$, w satisfaz as condições do teorema de Rolle, incluindo que $w(a) = w(b)$
então existe $c \in]a, b[$ tal que $w'(c) = 0$ ou seja

$$h(c) = -h'(c)\, 2c$$