DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

2º teste - LEIC-T, LEE, LETI, LEGI - versão A - duração: 45 minutos

13 de dezembro de 2022 - 18:15 horas

---

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (1+2x)e^{-x^2}\,, & \text{se } x \le 0; \\ \frac{1}{1+2x}\,, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(i) Determine, caso existam, os intervalos de monotonia e extremos relativos de f em $\mathbb{R}^-$.

(ii) Determine o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de $x-1$ que aproxima a função f em $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

(iii) Escreva a fórmula de Taylor de 2ª ordem em potências de $x-1$ com resto de Lagrange e encontre um majorante para o erro cometido ao aproximar a função f pelo polinómio descrito em (ii) no intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

2. Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites:

$$(i)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2 - \operatorname{sen} x}, \qquad (ii)\ \lim_{x\to+\infty} \left(x^2+1\right)^{\frac{1}{x}}\,.$$

3. Determine uma primitiva para cada uma das seguintes funções:

$$(i)\ \frac{e^x + \cos x}{e^x + \operatorname{sen} x} \quad , \qquad (ii)\ 2x\arctan(x) \quad , \qquad (iii)\ \frac{1}{x\,(\sqrt{x}+1)}\,.$$

4. Determine a função $g :]-3,3[\to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \qquad \text{e} \qquad g(0) = 1\,.$$

5. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, tais que $a < b$, e $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável. Mostre que se

$$\sqrt{\frac{b}{a}}\,h(b) - h(a) = 0$$

então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$h(c) = -h'(c)\,2c$$