Cálculo Diferencial e Integral I

2º teste - MEMec, LENO - versão A

7 de janeiro de 2019 - 9 horas

I (12 val.)

1. Determine o valor dos integrais:

$$\text{i)} \quad \int_0^1 \frac{x\ln(1+x^2)}{x^2+1}\,dx\ , \qquad\qquad \text{ii)} \quad \int_{-1}^0 x\,\mathrm{arctg}(x+1)\,dx$$

Resolução.

(i) Da formula de Barrow tem-se

$$\int_0^1 \frac{x\ln(1+x^2)}{x^2+1}\,dx\ ,= \left[\frac{\ln^2(1+x^2)}{4}\right]_0^1 = \frac{\ln^2(2)}{4}\,.$$

(ii) Integrando por partes,

$$\int_{-1}^0 x\,\mathrm{arctg}(x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}(x+1)\right]_{-1}^0 - \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{x^2}{1+(x+1)^2}\,dx = 0 - \frac{1}{2}\int_{-1}^0 1 - \frac{2x+2}{2+2x+x^2}\,dx\,,$$

assim

$$\int_{-1}^0 x\,\mathrm{arctg}(x+1)\,dx = -\frac{1}{2}\left[x - \ln(2+2x+x^2)\right]_{-1}^0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

■

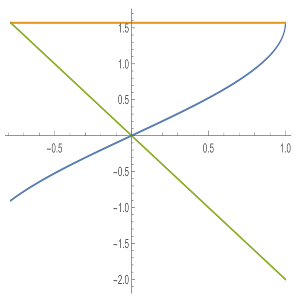
2. Designe-se por A a região limitada pelas linhas de equação

$$y = \mathrm{arcsen}\,x, \quad y = -2x \quad \text{e} \quad y = \frac{\pi}{2}$$

Esboce graficamente a região A e calcule a sua área.

Resolução.

A figura anterior descreve a fronteira da região em questão



De $\frac{\pi}{2} = (-2x)$ tem-se $x = -\frac{\pi}{4}$ e de $\frac{\pi}{2} = \operatorname{arcsen} x$ tem-se $x = 1$, obtendo-se a seguinte expressão para área da região plana

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\pi}{2} - (-2x)\, dx + \int_{0}^{1} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x\, dx = \frac{\pi^2}{16} + 1$$

uma vez que $P(\operatorname{arcsen} x) = x \operatorname{arcsen} x - P(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}) = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}$ e da fórmula de Barrow se tem

$$\int_{0}^{1} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x\, dx = \left[\frac{\pi}{2}x - (x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2})\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1\,.$$

e

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\pi}{2} - (-2x)\, dx = \left[\frac{\pi}{2}x + x^2\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16}\,.$$

■

3. Seja a função

$$g(x) = \int_{1}^{\frac{x}{2}} \frac{e^x}{3 + e^{2t}}\, dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

i) Defina a função derivada de g.

ii) Determine, usando a mudança de variável $u = e^t$, o valor de $g(0)$.

iii) Indique o polinómio de 2º grau em potências de x associado à função g.

Resolução.

i) A função $F(x) = \displaystyle\int_{1}^{x} \frac{1}{3 + e^{2t}}\, dt$. é um integral indefinido cujo integrando é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e portanto F é diferenciável do teorema fundamental do cálculo. Como $g(x) = e^x F(\frac{x}{2})$, tem-se g diferenciável do produto e composição de funções diferenciáveis.
A função derivada de g é definida por $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e

$$g'(x) = g(x) + \frac{1}{2}\frac{e^x}{3 + e^x}\,.$$

ii) $g(0) = \displaystyle\int_{1}^{0} \frac{1}{3 + e^{2t}}\, dt$. Integrando por substituição, usando a mudança de variável, $u = e^t$, tem-se

$$-\int_{0}^{1} \frac{1}{3 + e^{2t}}\, dt = -\int_{1}^{e} \frac{1}{3 + u^2}\frac{1}{u},\, du\,.$$

A função integranda é uma função racional própria que se decompõe em fracções simples, obtendo-se a igualdade seguinte para o integral,

$$\int_{1}^{e} \frac{1}{3 + u^2}\frac{1}{u},\, du = A\int_{1}^{e} \frac{1}{u}\, du + \int_{1}^{e} \frac{Bu + C}{3 + u^2}\, du$$

A determinação das constantes A, B, C é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

$$1 = A(3 + u^2) + (Bu + C)u\,, \quad \text{ou seja} \quad 0u^2 + 0u + 1 = (A + B)u^2 + Cu + 3A$$

obtendo-se $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = 0$, e da fórmula de Barrow vem

$$g(0) = -\int_{1}^{e} \frac{1}{3 + u^2}\frac{1}{u},\, du = -\frac{1}{3}\left[\ln|u|\right]_1^e + \frac{1}{6}\left[\ln|3 + u^2|\right]_1^e = -\frac{1}{3} + \frac{\ln(3 + e^2)}{6} - \frac{\ln(4)}{6}$$

iii) O polinómio de 2º grau em potências de x associado à função g é da forma

$$P_2(x) = g(0) + g'(0)x + g''(0)\frac{x^2}{2!}$$

Usando os resultados das alíneas anteriores, determinam-se os diferentes coeficientes polinomiais,

$$g(0) = -\frac{1}{3} + \frac{\ln(3+e^2)}{6} - \frac{\ln(4)}{6}\,, \quad g'(0) = g(0) + \frac{1}{2}\frac{e^0}{3+e^0} = g(0) + \frac{1}{8}$$

e

$$g''(x) = \left(g(x) + \frac{1}{2}\frac{e^x}{3+e^x}\right)' = g'(x) + \frac{1}{2}\frac{3e^x}{(3+e^x)^2} \qquad g''(0) = g'(0) + \frac{3}{32}$$

▪

4. Mostre, atendendo a que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$, que sendo f uma função real de variável real contínua se tem

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\, dx\,.$$

Resolução. Atendendo a que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$ e utilizando a mudança de variável $u = \pi - x$

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \int_0^\pi x f(\operatorname{sen}(\pi - x))\, dx = \int_\pi^0 (\pi - u) f(\operatorname{sen} u)\,(-1) du\,.$$

Tem-se

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \int_0^\pi \pi f(\operatorname{sen} x)\, dx - \int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx\,,$$

ou seja

$$2\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \int_0^\pi \pi f(\operatorname{sen} x)\, dx\,,$$

vindo

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\, dx\,.$$

▪

II (8 val.)

1. Analise a natureza de cada uma das séries seguintes e indique a soma de uma delas

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\pi^2}\right)^n \quad , \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}\cos(n!)}{n^2+1} \quad , \quad \text{iii)} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-2)!}{n!+2}\,.$$

Resolução. *i)* A série $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\pi^2}\right)^n$ é convergente, pois é uma série geométrica de razão $R = \frac{1}{1+\pi^2} < 1$ e tem soma

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\pi^2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{1+\pi^2}} = \frac{1+\pi^2}{\pi^2}\,.$$

ii) De $|\cos(n!)| \le 1$ e de $n^2+1 > n^2$, vem

$$\left|\frac{n^{\frac{1}{2}}\cos(n!)}{n^2+1}\right| \le \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Sendo a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ uma série de Dirichlet convergente ($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ com $p = \frac{3}{2} > 1$), aplicando o critério geral de comparação tem-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n^{\frac{1}{2}}\cos(n!)}{n^2+1}\right|$ é convergente e consequentemente a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}\cos(n!)}{n^2+1}$ é igualmente convergente.

iii) Tem-se $\frac{(n-2)!}{n!+2} < \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$

Considerem-se agora as sucessões $a_n = \frac{1}{n(n-1)}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$. Tem-se $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1 \in \mathbb{R}^+$. Do critério

de comparação as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = 2 > 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ é também convergente.
Finalmente, da desigualdade inicial, aplicando o critério geral de comparação, da convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ tem-se a convergência da série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-2)!}{n!+2}$. ∎

2. Seja a soma das séries de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2^n+1}(x-1)^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)^n\,,$$

em que α é uma constante real.

i) Determine um intervalo de $\mathbb{R}$ em que é convergente a soma das séries.

ii) Sendo $\alpha = 0$ indique a função soma e o valor dessa função quando $x = 1/2$.

Resolução.

i) Tem-se para o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2^n+1}(x-1)^{2n+1}$

$$r_1 = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{|\alpha|}{2^n+1}}{\frac{|\alpha|}{2^{n+1}+1}} = 2$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2^n+1}(x-1)^{2n+1}$ converge absolutamente se $|(x-1)^2| < 2$, i.e $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$.

Tem-se para o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)^n$

$$r_2 = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = 1$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)^n$ converge absolutamente se $|1-x| < 1$, i.e $0 < x < 2$.
Como a soma de séries convergentes é convergente, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2^n+1}(x-1)^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)^n\,,$$

converge para $x \in]0,2[$.

ii) $f :]0,2[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

∎

3. Supondo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de termos positivos, indique, justificando, qual a natureza das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+a_n^2}$$

Resolução. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\lim a_n = 0$. Tem-se $\lim \frac{a_n^3}{a_n} = \lim a_n = 0$ e aplicando o critério de comparação a série $\sum_{n=m}^{\infty} a_n^3$ é convergente.

Já a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+a_n^2}$ é divergente uma vez que, $\lim a_n = 0$, e $\lim \dfrac{1}{3+a_n^2} = \dfrac{1}{3+0} \neq 0$ não sendo satisfeita a condição necessária para a convergência da série.

$\blacksquare$