Cálculo Diferencial e Integral I

2ºteste - MEMec e LENO - versão A 8 de Janeiro de 2018 - 9:00h

---

I (13 val.)

1. Determine o valor dos seguintes integrais:

$$\text{i)} \int_2^3 \frac{5x+4}{(x+2)(x-1)}\,dx\ , \qquad\qquad \text{ii)} \int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx\ .$$

Resolução. (i) A função integranda é uma função racional própria que se decompõe em fracções simples, obtendo-se a igualdade seguinte para o integral,

$$\int_2^3 \frac{5x+4}{(x+2)(x-1)}\,dx\ = A\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx + B\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx$$

e da fórmula de Barrow tem-se

$$\int_2^3 \frac{5x+4}{(x+2)(x-1)}\,dx = A\left[\ln|x+2|\right]_2^3 + B\left[\ln|x-1|\right]_2^3$$

A determinação das constantes A, B é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

$$5x+4 = (A+B)x - A + 2B,$$

vindo que

$$\begin{cases} A+B=5 \\ -A+2B=4 \end{cases}$$

Obtém-se $A=2,\ B=3$,

$$\int_2^3 \frac{5x+4}{(x+2)(x-1)}\,dx = 2\left[\ln|x+2|\right]_2^3 + 3\left[\ln|x-1|\right]_2^3 = \ln\left(\frac{25}{2}\right)\ .$$

(ii) Integrando por partes,

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8} - \int_0^1 \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8} - \left[\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,.$$

■

2. Determine a área da figura plana situada no semiplano $x \geq 0$ e limitada pelas linhas

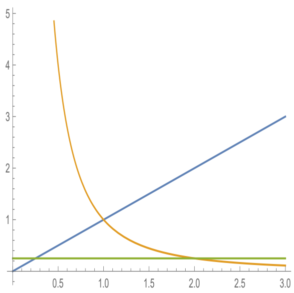
$$y = x\,, \qquad y = \frac{1}{x^2}\,, \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1}{4}\ .$$

Resolução.

A figura seguinte descreve a fronteira da região em questão

Estabelecendo para $x \geq 0$, $x = \frac{1}{x^2}$ tem-se $x = 1$, obtendo-se a seguinte expressão para a área da região plana

$$\int_{\frac{1}{4}}^1 x - \frac{1}{4}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\,dx\ = \frac{9}{32} + \left[-\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right]_1^2 = \frac{9}{32} + \frac{1}{4} = \frac{17}{32}\,.$$



■

3. Considere a função

$$g(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x^2} \frac{\sqrt{4-u^2}}{u^4}\, du\ .$$

i) Determine $g(1)$. (*Sugestão: Utilize a substituição* $u = \frac{1}{t}$.)

ii) A função g é diferenciável em $I =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$? Justifique e em caso afirmativo indique em I a expressão da função derivada de g.

Resolução.

i)

$$g(1) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{4-u^2}}{u^4}\, du\ = \int_{2}^{1} \frac{\sqrt{4-\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t^4}} \frac{-1}{t^2}\, dt\ = \int_{1}^{2} t\sqrt{4t^2-1}\, dt\ = \left[\frac{1}{12}(4t^2-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{12}(15)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}(3)^{\frac{3}{2}}$$

ii)

$$g(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x^2} \frac{\sqrt{4-u^2}}{u^4}\, du\ .$$

A função $F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\sqrt{4-u^2}}{u^4}\, du$ é um integral indefinido cujo integrando é uma função contínua em $\mathbb{R}^+$ e portanto F é uma função diferenciável do teorema fundamental do cálculo. Como $g(x) = F(x^2)$, resulta da composição de funções diferenciáveis, g é também diferenciável em I. A função derivada de g é definida por

$$g'(x) = 2x\frac{\sqrt{4-x^4}}{x^8} \qquad x \in I.$$

■

4. Determine a função f, tal que f'' é uma função contínua em $\mathbb{R}$, $f'(0) = f(0) = 1$ e

$$\int_0^x f''(t)\, dt\ =\ x^5 + x\,.$$

Resolução. Sendo f'' é uma função contínua em $\mathbb{R}$, do teorema fundamental do cálculo integral tem-se

$$f''(x)\ =\ 5x^4 + 1\,.$$

primitivando ambos os membros da igualdade anterior e repetindo o processo, vem

$$f'(x)\, dt\ =\ x^5 + x + C_1 \qquad \text{e} \qquad f(x)\ =\ \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2\,.$$

Como $f'(0) = f(0) = 1$ obtém-se

$$f(x)\ =\ \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

■

II (7 val.)

1. Analise a natureza das séries

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$, ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$, iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+n^3e^n}{1+n^5e^n}\cos(n\alpha)\,,$ $\alpha \neq 0\,, \alpha \in \mathbb{R}\,.$

Resolução. *i)* A série $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$ é convergente, uma vez que

$$\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

onde a série é uma série geométrica convergente de razão $|R| = 2/5 < 1$.

ii) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} =$ é convergente do critério geral de comparação, uma vez que

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é uma série de Dirichlet convergente com $p = \frac{3}{2} > 1$.

iii) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{1+n^3e^n}{1+n^5e^n}\cos(n\alpha)\right|$

Do critério geral de comparação, ($|\cos(n\alpha)| \leq 1$)
tem-se

$$\left|\frac{1+n^3e^n}{1+n^5e^n}\cos(n\alpha)\right| \leq \frac{1+n^3e^n}{1+n^5e^n} < \frac{1+n^3e^n}{n^5e^n}$$

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^3e^n}{n^5e^n}$ é convergente, poisresulta da soma de duas séries convergentes,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^3e^n}{n^5e^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5e^n}$$

é uma série de Dirichlet convergente com $\alpha = 2 > 1$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5e^n}$$

é uma série convergente do critério de D'Alembert, uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-5}\frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1+n^3e^n}{1+n^5e^n}\cos(n\alpha)\right|$ converge implica que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+n^3e^n}{1+n^5e^n}\cos(n\alpha)$ seja também convergente.

■

2. Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{1+\beta n}(x-1)^n\,, \qquad \beta > 0\,.$$

i) Determine os valores reais para os quais a série é absolutamente convergente e para os quais a série é divergente.

ii) Para $\beta = 0$, calcule a soma da série nos casos em que é possivel.

Resolução.

i) Tem-se para o raio de convergência,

$$r = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^n}{1+\beta n}}{\frac{2^{n+1}}{1+\beta(n+1)}} = 1/2$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\,2^{n-1}}$ converge absolutamente se $|x-1| < \frac{1}{2}$, i.e $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$. O intervalo de convergência da série $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ é o maior intervalo aberto onde a série converge absolutamente e no seu exterior a série diverge. Vejamos agora nos pontos de fronteira,

Para $x = \frac{3}{2}$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\beta n}$ é divergente do critério de comparação, uma vez que, considerando $a_n = \frac{1}{1+\beta n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \beta \in \mathbb{R}^+ .$$

As séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet divergente, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = 1 \leq 1$.

Para $x = \frac{1}{2}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\beta n}$ não é absolutamente convergente, uma vez a série $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n}{1+\beta n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\beta n}$, que já sabemos que é uma série divergente.

ii) Para $\beta = 0$, tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2x-2)^n = \frac{2x-2}{1-(2x-2)} \qquad x \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[.$$

∎

3. Sendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, uma série convergente conclua, justificando, qual a natureza das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+(a_n)^2} , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2} - a_n) .$$

Resolução.

Sendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente vem que a sucessão a_n converge para 0.

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2} - a_n)$ é uma série de Mengoli convergente, pois a_n é uma sucessão convergente.

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+(a_n)^2}$$

é uma série convergente do critério geral de comparação, uma vez que $1 + (a_n)^2 > 1$, vindo

$$\frac{a_n}{1+(a_n)^2} < a_n$$

e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente.

∎