Cálculo Diferencial e Integral I

2ºteste - MEMec - versão A 9 de Janeiro de 2017 - 9:00h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I (12 val.)

1. Determine o valor dos integrais:

i) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}}\,dx$, ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(x^2-1)(x-1)}\,dx$, iii) $\int_0^1 (x-1)\operatorname{arctg} x\,dx$.

Resolução. (i) Da formula de Barrow tem-se

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}}\,dx \;, = \left[2\sqrt{(\ln x+1)}\right]_1^e = 2(\sqrt{2}-1)\,.$$

(ii) A função integranda é uma função racional própria que se decompõe em fracções simples, obtendo-se a igualdade seguinte para o integral,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(x^2-1)(x-1)}\,dx = A\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x+1}\,dx + B\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-1}\,dx + C\int_0^{1} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

e da fórmula de Barrow tem-se

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(x^2-1)(x-1)}\,dx = A\left[\ln|x+1|\right]_0^{\frac{1}{2}} + B\left[\ln|x-1|\right]_0^{\frac{1}{2}} + C\left[\frac{-1}{x-1}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

A determinação das constantes A, B, C é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

$$x = (A+B)x^2 + (-2A+C)x + A - B + C,$$

vindo que

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+C=1 \\ A-B+C=0. \end{cases}$$

Obtém-se $A=-\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{2}$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(x^2-1)(x-1)}\,dx = -\frac{1}{4}\left[\ln|x+1|\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\left[\ln|x-1|\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x-1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt[4]{3}+1\,.$$

(iii) Integrando por partes,

$$\int_0^1 (x-1)\operatorname{arctg} x\,dx = \left[\frac{(x-1)^2}{2}\operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 1 - \frac{2x}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[x-\ln(1+x^2)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}(1-\ln 2)\,.$$

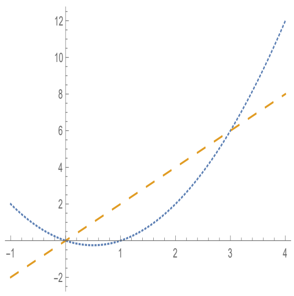
■

2. Calcule a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas linhas

$$y = x(x-1)\,, \qquad\qquad y = 2x\ .$$

Resolução.

A figura seguite descreve a fronteira da região em questão



De $x(x-1) = 2x$ tem-se $x = 3$, obtendo-se a seguinte expressão para a área da região plana

$$\int_0^3 2x - x(x-1)\, dx \,=\, \int_0^3 3x - x^2\, dx\,,$$

vindo, da fórmula de Barrow,

$$\int_0^3 3x - x^2\, dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{9}{2}\,.$$

▪

3. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_0^{2x} \frac{f(t)}{1+|t|}\, dt\ .$$

i) A função g é diferenciável em $\mathbb{R}$? Justifique e defina a função derivada de g.

ii) Sabendo que f é uma função par $(f(t) = f(-t)\,,\, \forall t \in \mathbb{R})$ o que pode concluir sobre a paridade de g? Justifique.

Resolução.

i) A função $F(x) = \int_0^x \dfrac{f(t)}{1+|t|}\, dt$ é um integral indefinido cujo integrando é uma função contínua em $\mathbb{R}$ resultante da composição e do produto de funções contínuas sendo F é diferenciável em $\mathbb{R}$ do teorema fundamental do cálculo. Como $g(x) = F(2x) = \int_0^{2x} \dfrac{f(t)}{1+|t|}\, dt$, resulta da composição de funções diferenciáveis, g é também diferenciável em $\mathbb{R}$. A função derivada de g é definida por $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e

$$g'(x) = 2\, \frac{f(2x)}{1+|2x|}\,.$$

ii) $g(-x) = \int_0^{-2x} \dfrac{f(t)}{1+|t|}\, dt$. Integrando por substituição, usando a mudança de variável, $t = -u$, e a paridade da função f tem-se

$$\int_0^{-2x} \frac{f(t)}{1+|t|}\, dt = \int_0^{2x} \frac{f(-u)}{1+|-u|}(-1)\, du = -\int_0^{2x} \frac{f(u)}{1+|u|}\, du = -g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Ou seja a função g é impar.

▪

II (8 val.)

1. Estude a natureza de cada uma das séries seguintes e determine a soma de uma delas:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{-n} \quad , \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!-n!}{(3n)!} \quad , \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n+1}\,(n^3+1)} \,.$$

Resolução.

i) A série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n$ é convergente, pois é uma série geométrica de razão $R = 2/e < 1$ e tem soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = \frac{\frac{2}{e}}{1-\frac{2}{e}} = \frac{2}{e-2}\,.$$

ii) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!-n!}{(3n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nn!}{(3n)!}$ é convergente do critério de D'Alembert, uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+1)!}{(3n+3)!} \Big/ \frac{nn!}{(3n)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n(3n+3)(3n+2)(3n+1)} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1+1/n}{3(3+2/n)(3+1/n} = 0 < 1\,.$$

iii) Considerem-se as sucessões $a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n+1}\,(n^3+1)}$ e $b_n = \frac{n^2}{\sqrt{n}n^3} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in \mathbb{R}^+\,.$$

Do critério de comparação as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = 3/2 > 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n+1}\,(n^3+1)}$ é também convergente.

▪

2. Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x^n}{n(n+1)} \quad , \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Determine o conjunto dos números reais onde a série é absolutamente convergente.

Resolução.

Tem-se para o raio de convergência

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{n(n+1)}}{\frac{3}{(n+1)(n+2)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n} \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x^n}{n(n+1)}$ converge absolutamente se $|x| < 1$, i.e $-1 < x < 1$. O intervalo de convergência da série $]-1,1[$ é o maior intervalo aberto onde a série converge absolutamente.

Falta analisar os pontos de fronteira do intervalo de convergência. Para $x = 1$, a série numérica $3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge absolutamente do critério geral de comparação com a série de Dirichlet convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, uma vez que $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$.

Para $x = -1$, a série numérica $3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ também converge absolutamente pois a série dos módulos $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, é a série estudada em $x = 1$.

▪

3. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de soma s qual a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2a_{n+1}) \ ?$$

Se for convergente qual o valor da sua soma?

Resolução. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de soma s, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2a_{n+1}) = -2a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

é igualmente convergente resultante da adição de 2 séries convergentes e de soma $3s - 2a_1$.

▪

4. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $h(0) = 1$ e $h'(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Diga justificando se são convergentes ou divergentes as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(n)\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{h(n+1)\,n^2}\,.$$

Resolução. Como $h'(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, a função h é estritamente crescente. Como $h(0) = 1$, $h(n) > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\lim h(n) \neq 0$, não satisfazendo a condição necessária para a convergência de séries, ou seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} h(n)$ é divergente.

Usando novamente as considerações iniciais, tem-se $h(n) > 0$ e $\dfrac{h(n)}{h(n+1)} < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tem-se

$$\frac{h(n)}{h(n+1)n^2} < \frac{1}{n^2}$$

Satisfeita a condição do critério geral de comparação, como a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ é uma série convergente a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{h(n)}{h(n+1)\,n^2}$ é convergente.

▪