

Cálculo Diferencial e Integral I

1^o teste - LEIC-T, LEE, LETI, LEGI - versão B

25 de outubro de 2022 - 18:15 horas

1. Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3|(3 - x^2) \geq 0\} \quad B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

- (i) Mostre que $A \cup B = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup \{3\}$. Verifique se os conjuntos A , B , são majorados ou minorados e caso sejam, indique em \mathbb{R} , o conjunto dos majorantes e dos minorantes dos mesmos.
- (ii) Caso existam, determine em \mathbb{R} , o supremo, infimo, máximo e mínimo de cada um dos conjuntos A , B e $(A \cup B) \setminus \mathbb{Q}$.

2. Usando o princípio de indução matemática, demonstre a seguinte afirmação:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x > 0; \\ \frac{\pi \cos(e^{\frac{1}{x}})}{2}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- (i) Estude a função f do ponto de vista da continuidade.
- (ii) A função f é prolongável por continuidade em $x = 0$? Justifique. Em caso afirmativo, defina a função prolongamento de f .

4. Considere a função $g :]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x \ln(1 + x^2), & \text{se } x \leq 0. \\ \cos(\arcsen(x)), & \text{se } 0 < x < 1; \end{cases}$$

- (i) A função g é diferenciável em $x = 0$? Justifique.
- (ii) Determine $g'(x)$ para $x < 0$.
- (iii) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de coordenadas $(\frac{4}{5}, g(\frac{4}{5}))$. Indique o valor da derivada da função inversa da função g restrita a $]0, 1[$ no ponto $g(\frac{4}{5})$. Justifique.

5. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$ e considere $h : [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se existirem em \mathbb{R} , $h(c^+)$ e $h(c^-)$, mostre que h é uma função limitada.