DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

1ºteste - LEIC-T, LEE, LETI, LEGI - versão A

25 de outubro de 2022 - 18:15 horas

---

1. Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x-2|}{(2-x^2)} \geq 0\} \qquad B = \{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

(i) Mostre que $A \cup B =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cup\{2\}$. Verifique se os conjuntos A, B, são majorados ou minorados e caso sejam, indique em $\mathbb{R}$, o conjunto dos majorantes e dos minorantes dos mesmos.

Soluções:

$$A =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cup\{2\}, \qquad B \subset A, \qquad Maj(A) = [2, +\infty[,$$

$$Maj(B) = [\frac{1}{2}, +\infty[, \quad Min(A) =]-\infty, -\sqrt{2}], \quad Min(B) =]-\infty, -1]$$

(ii) Caso existam, determine em $\mathbb{R}$, o supremo, infimo, máximo e minimo de cada um dos conjuntos A, B e $(A \cup B) \setminus \mathbb{Q}$.

Soluções:

$$\sup((A \cup B) \setminus \mathbb{Q}) = \sqrt{2}, \quad \inf((A \cup B) \setminus \mathbb{Q}) = -\sqrt{2} \setminus \mathbb{Q}$$

Não existe $\max((A \cup B) \setminus \mathbb{Q})$ nem $\min((A \cup B) \setminus \mathbb{Q})$

$$\sup(A) = 2, \quad sup(B) = \frac{1}{2}, \quad \inf(A) = -\sqrt{2}, \quad \inf(B) = -1,$$

Não existe $\min(A)$, mas existem, $\max(A) = 2$, $\max(B) = \frac{1}{2}$, $\min(B) = -1$

2. Usando o princípio de indução matemática, demonstre a seguinte afirmação:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi \cos(e^{\frac{1}{x}})}{2}, & \text{se } x < 0. \\ \arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

(i) Estude a função f do ponto de vista da continuidade.

(ii) A função f é prolongável por continuidade em $x = 0$? Justifique. Em caso afirmativo, defina a função prolongamento de f.

Resposta:

Uma vez que existe $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$, o prolongamento é a função F, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{se } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

4. Considere a função $g :]\infty, 1[\to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} xe^{1-x^2}\,, & \text{se } x \leq 0. \\ \operatorname{sen}(\arccos(x))\,, & \text{se } 0 < x < 1; \end{cases}$$

(i) A função g é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

Soluções:

A função $g(x)$ não é diferenciável em $x = 0$, uma vez que não é contínua em $x = 0$

$$g(0) \neq \lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

(ii) Determine $g'(x)$ para $x < 0$.

Soluções:

$$g'(x) = \left(xe^{1-x^2}\right)' = e^{1-x^2} + x\left(-2xe^{1-x^2}\right) = \left(1 - 2x^2\right)e^{1-x^2}.$$

(iii) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de coordenadas $(\frac{4}{5}, g(\frac{4}{5}))$. Indique o valor da derivada da função inversa da função g restrita a $]0, 1[$ no ponto $g(\frac{4}{5})$. Justifique.

Soluções:

$$g(\frac{4}{5}) = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}, \quad g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad g'(\frac{4}{5}) = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$$

$$y = g(\frac{4}{5}) + g'(\frac{4}{5})(x - \frac{4}{5}),$$

$$\left(g^{-1}(g(\frac{4}{5}))\right)' = \frac{1}{g'(\frac{4}{5})} = -\frac{4}{3}.$$

5. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$ e considere $h : [a, b] \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se existirem em $\mathbb{R}$, $h(c^+)$ e $h(c^-)$, mostre que h é uma função limitada.

Esboço da dem.: Existindo em $\mathbb{R}$, $h(c^+)$ e $h(c^-)$. Se $h(c^+) = h(c^-)$, h é prolongável por continuidade em $x = c$. Sendo H o seu prolongamento, H é contínua Em $[a, b]$, do teorema da limitação H é limitada em $[a, b]$ ou seja o conjunto $H([a, b])$ é limitado. Como $h([a, b] \setminus \{c\}) \subset H([a, b])$, o conjunto $h([a, b] \setminus \{c\})$ é limitado, ou seja h é limitada.
Se $h(c^+) \neq h(c^-)$, $h|_{[a,c[}$ é prolongável por continuidade em $x = c^-$. Sendo H_1 o seu prolongamento, H_1 é contínua Em $[a, c]$, sendo H_1 limitada em $[a, c]$ e consequentemente $h|_{[a,c[}$ é limitada. Analogamente se concluí que $h|_{]c,b]}$ é limitada sendo h limitada em $[a, b] \setminus \{c\}$.