Cálculo Diferencial e Integral I

1ºteste - MEMec, LENO - versão A

11 de Novembro de 2017 - 9 horas

I (6,5 val.)

1. Considere a sucessão x_n crescente definida por

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n^2}{2}} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Mostre por indução matemática que $x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) A sucessão x_n é convergente? Em caso afirmativo determine o seu limite. Justifique.

Resolução.

(i) Por indução matemática, para $n = 1$, tem-se $x_1 = 0 < 1$. Mostre-se que se $x_m < 1$ então $x_{m+1} < 1$. Assim, como $x_m \geq 0$ por ser uma sucessão crescente, da hipótese de indução, $x_m < 1$, tem-se $x_m^2 < 1$ donde vem $\sqrt{\frac{1+x_m^2}{2}} < \sqrt{\frac{1+1}{2}}$ ou seja $x_{m+1} < 1$.

(ii) A sucessão x_n é convergente, dado que, x_n é monótona (crescente) e sendo $x_1 \leq x_n < 1 \ \forall n \in N$, x_n é também limitada. Represente-se o limite de x_n por x.
Toda a subsucessão de x_n é convergente, em particular $x_{n+1} \to x$. Por outro lado a sucessão $\sqrt{\frac{1+x_n^2}{2}}$ também é convergente e o seu limite é $\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}$, vindo

$$x = \sqrt{\frac{1+x^2}{2}} \Rightarrow x^2 - \frac{1+x^2}{2} = 0$$

Concluindo-se que $x = 1$, uma vez que $x_n \geq 0$.

▪

2. Sejam as sucessões

$$u_n = \frac{(n+1)! + 5^n(n+1)}{2n!n + n^6}, \qquad v_n = \frac{(2n)!n^n}{(3n)!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Determine, em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites das sucessões u_n e v_n.

(ii) Indique o conjunto dos limites das subsucessões de $w_n = \operatorname{arcsen}((-1)^n u_n) + \sqrt[n]{v_n}$.

Resolução.

(i)

$$\lim u_n = \lim \frac{(n+1)! + 5^n(n+1)}{2n!n + n^6} = \lim \frac{(n+1)!}{2n!n} \frac{1 + \frac{5^n(n+1)}{(n+1)!}}{1 + \frac{n^6}{2n!n}} = \lim \frac{n+1}{2n} \lim \frac{1 + \frac{5^n}{n!}}{1 + \frac{1}{2}\frac{n^5}{n!}} = \frac{1}{2}$$

uma vez que $\dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{n}) \to \dfrac{1}{2}$ e da escala de sucessões

$$\frac{n^5}{n!} \to 0\,, \qquad \frac{5^n}{n!} \to 0$$

$$\lim v_n = \frac{(2n)!n^n}{(3n)!} = 0.$$

uma vez que

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim \frac{\dfrac{(2n+2)!(n+1)^{n+1}}{(3n+3)!}}{\dfrac{(2n)!n^n}{(3n)!}} =$$

$$\lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{3(3n+2)(3n+1)} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim \frac{(2+2/n)(2+1/n)}{3(3+2/n)(3+1/n)} = \frac{4e}{27} < 1\,.$$

(ii) Tem-se da alínea anterior,

$$\lim \sqrt[n]{v_n} = \lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4e}{27}$$

A sucessão $w_n = \operatorname{arcsen}((-1)^n u_n) + \sqrt[n]{v_n}$ não é convergente, uma vez que, as subsucessões w_{2n} e w_{2n-1} são convergentes em $\mathbb{R}$ e $\lim w_{2n} \neq \lim w_{2n-1}$. O conjunto dos sublimites de w_n é o conjunto $\{-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4e}{27}, \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4e}{27}\}$.

▪

II (13,5 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\,, & \text{se } x > 0; \\ (1+4x^2)\operatorname{arctg}(2x) - 2x\,, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(i) A função f é contínua em $x = 0$? Justifique.

(ii) Defina a função derivada de f.

(iii) Analise a monotonia de f em $\mathbb{R}^+$. Em $\mathbb{R}^+$ a função f tem extremos locais? Justifique.

(iv) Conclua se a função f tem inversa em $\mathbb{R}^-$ e determine, se existir, a derivada da função inversa em $f(-\frac{1}{2})$.

Resolução.

(i)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0 + \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-x+1}{x^2}\right) = +\infty$$

A função f não é contínua no ponto 0.

(ii) A função f não é contínua no ponto 0 logo não é diferenciável no ponto 0. Em cada um dos intervalos, $x > 0$ e $x < 0$, a função é diferenciável, pois resulta da soma produto e composição de funções diferenciáveis.
$f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\,, & \text{se } x > 0. \\ 8x\operatorname{arctg}(2x)\,, & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

(iii) Tem-se para $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{x^3+x-2}{x^3} = \dfrac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$ e $f'(1) = 0$.
Para $0 \leq x < 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f é uma função decrescente.
Para $x > 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f é uma função crescente.
Concluindo-se que $f(1) = 1$ é minimo local.

(iv) Para $x<0$ tem-se $f'(x)>0$ concluindo-se que f é uma função estritamente crescente. Consequentemente f é injectiva e tem inversa. Seja $g=f^{-1}$. $f(-\frac{1}{2})=2\operatorname{arctg}(-1)+1=\frac{2-\pi}{2}$

$$g'(\frac{2-\pi}{2})=\frac{1}{f'(-\frac{1}{2})}=\frac{1}{-4\operatorname{arctg}(-1)}=\frac{1}{\pi}.$$

■

2. Mostre que a equação

$$e^x=4-x^2$$

tem duas soluções e que essas soluções são as únicas.

Resolução. Seja $f(x)=-4+x^2+e^x$, f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Como $f(-2).f(0)<0$ e $f(2).f(0)<0$, do teorema de Bolzano tem-se a existência de pelo menos um zero da função f em $]-2,0[$ e $]0,2[$. Vejamos que são únicas.
Se existissem três zeros de f. Então do teorema de Rolle, existiriam dois zeros da função derivada de f, o que não é possível pois $f''(x)=e^x+2>0$ e a função f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ logo injetiva e assim f' tem um único zero. ■

3. Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$:

$$(i)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{cotg}x},\qquad (ii)\ \lim_{x\to 0}\big(\ln(x^2+1)\big)^x\ .$$

Resolução.

(i)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{cotg}x}=0$$

Da regra de Cauchy, uma vez que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\ln(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{cotg}x}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(\ln(\operatorname{sen}x))'}{(\operatorname{cotg}x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{sen}x\cos x=0$$

(ii)

$$\lim_{x\to 0}\big(\ln(x^2+1)\big)^x=e^0=1$$

de facto, uma vez que

$$\lim_{x\to 0}\big(\ln(x^2+1)\big)^x=e^{\lim_{x\to 0}x\ln\left(\ln(x^2+1)\right)}$$

e da regra de Cauchy, pois $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln\big(\ln(x^2+1)\big)}{1/x}=\dfrac{\infty}{\infty}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\big(\ln(x^2+1)\big)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^3}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\big(-2x^3\big)'}{\big((x^2+1)\ln(x^2+1)\big)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\ln(x^2+1)+1}=0$$

■

4. Seja $f:]0,1[\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ que tem prolongamento por continuidade, $\bar{f}$, a 0 e 1, tal que $\bar{f}(0)=\bar{f}(1)=1$. Se a equação $f'(x)=0$ tiver exatamente n soluções, $x_1,x_2,\ldots,x_n$, e $f(x_i)\neq 1$ para cada $i=1,\ldots,n$, mostre que o número de soluções da equação $f(x)=1$ é precisamente igual ao número de valores de $i=1,\ldots,n-1$, tais que

$$(f(x_i)-1)(f(x_{i+1})-1)<0\,.$$

Resolução.

Seja $g(x) = f(x) - 1$, $x \in]0,1[$, $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tem prolongamento por continuidade a 0 e 1, que se representa também por g e tal que $g(0) = g(1) = 0$ e $g'(x) = f'(x)$.

A equação $g(x) = 0$ tem em $[x_i, x_{i+1}]$ pelo menos uma solução pelo teorema de Bolzano, já que $g(x_i)g(x_{i+1}) < 0$ para cada $i = 1, \dots, n-1$.

Vejamos que a solução é única em $]x_i, x_{i+1}[$ para cada $i = 1, \dots, n-1$ pelo teorema de Rolle. Admita-se que existiam duas soluções c_{i_1}, c_{i_2}, $c_{i_1} < c_{i_2}$, da equação $g(x) = 0$ em $]x_i, x_{i+1}[$ para cada $i = 1, \dots, n-1$, então existiria d_i em $]c_{i_1}, c_{i_2}[$ tal que $g'(d_i) = 0$, o que não é possível pois apenas x_j $j = 1, \dots, n$ são soluções de $g'(x) = 0$.

▪