# Cálculo Diferencial e Integral I

*1ºteste - MEMec - versão A*

**12 de Novembro de 2016 - 8 horas**

---

**I (6 val.)**

**1.** Considere a sucessão $x_n$ definida por

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + x_n} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Mostre por indução matemática que $x_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) A sucessão $x_n$ é crescente? Justifique.

(iii) A sucessão $x_n$ é convergente? Justifique e em caso afirmativo determine o seu limite.

**Resolução.**

(i) Por indução matemática, para $n = 1$, tem-se $x_1 = 0 < 1$. Para $n = m$, mostre-se que se $x_m < 3$ então $x_{m+1} < 3$. Sendo $x_m < 3$, como $x_m > 0$, tem-se $1 + x_m < 4$ donde vem $1 + \sqrt{1 + x_m} < 1 + \sqrt{4}$ ou seja $x_{m+1} < 3$.

(ii) Mostremos que $x_{n+1} - x_n \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Por indução, para $n = 1$, $x_2 - x_1 = 1 - 0 \geq 0$. Para $n = m$, mostre-se que se $x_{m+1} - x_m \geq 0$ então $x_{m+2} - x_{m+1} \geq 0$.

$$x_{m+2} - x_{m+1} = \sqrt{1 + x_{m+1}} - \sqrt{1 + x_m} = \frac{x_{m+1} - x_m}{\sqrt{1 + x_{m+1}} + \sqrt{1 + x_m}} \geq 0$$

uma vez que $\sqrt{1 + x_{m+1}} + \sqrt{1 + x_m} > 0$ e da hipótese de indução $x_{m+1} - x_m \geq 0$.

(ii) A sucessão $u_n$ é convergente, dado que de $(ii)$, $a_n$ é monótona e como $x_1 \leq x_n < 3 \ \ \forall n \in Nb$, $x_n$ é limitada. Represente-se o limite de $x_n$ por $x$.
Toda a subsucessão de $x_n$ é convergente, em particular $x_{n+1} \to x$. Por outro lado a sucessão $1 + \sqrt{1 + x_n}$ também é convergente e o seu limite é $1 + \sqrt{1 + x}$, vindo

$$x = 1 + \sqrt{1 + x} \Rightarrow (x - 1)^2 - (1 + x) = 0$$

Concluindo-se que $x = 3$, uma vez que $x_n$ é crescente.

▪

**2.** Sejam as sucessões

$$u_n = \left(\frac{n^2}{n^2 + 4}\right)^{2n}, \qquad v_n = \frac{(3n)!}{2 + 2^{n^2}}, \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Determine, em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites das sucessões $u_n$ e $v_n$.

(ii) Indique o conjunto dos limites das subsucessões de $w_n = \dfrac{u_n + \sqrt[n]{v_n}}{\cos(n\pi)}$.

**Resolução.**

(i)

$$\lim u_n = \lim\left(\frac{n^2}{n^2+4}\right)^{2n} = 1$$

uma vez que

$$\lim\left(\frac{n^2}{n^2+4}\right)^{2n} = \lim \frac{1}{\left(\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{2/n}} = \frac{1}{\left(e^4\right)^0} = 1$$

$$\lim v_n = \lim \frac{(3n)!}{2+2^{n^2}} = 0.$$

uma vez que

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim \frac{\frac{(3n+3)!}{2+2^{(n+1)^2}}}{\frac{(3n)!}{2+2^{n^2}}} =$$

$$\lim \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{2^{2n+1}} \frac{2^{1-n^2}+1}{2^{1-(n+1)^2}+1} = \lim(3+3/n)(3+2/n)(3+1/n)2^{-1}\frac{n^3}{4^n} = 0\,, \quad \text{da escala de sucessões}\,.$$

(ii) Tem-se

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim \sqrt[n]{v_n}\,.$$

Da alínea anterior,

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim \sqrt[n]{v_n} = 0$$

A sucessão $w_n = \dfrac{u_n + \sqrt[n]{v_n}}{\cos(n\pi)}$ não é convergente, uma vez que, as subsucessões de $w_{2n}$ e $w_{2n-1}$ são convergentes em $\mathbb{R}$, mas $\lim w_{2n} \neq \lim w_{2n-1}$, concluindo-se que o conjunto dos sublimites de $w_n$ é o conjunto $\{-3, 3\}$.

▪

## II (14 val.)

**1.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(1+x^2\right), & \text{se } x \leq 1. \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-1}\right), & \text{se } x > 1; \end{cases}$$

(i) Determine se existirem em $\mathbb{R}$ os limites laterais de $f$ em 1. A função $f$ é contínua em 1? Justifique.

(ii) Defina a função derivada de $f$.

(iii) Indique os intervalos de monotonia de $f$. A função $f$ tem extremos locais no seu domínio? Justifique.

(iv) A função $f$ restrita a $]1, +\infty[$ é invertível? Justifique. Determine a derivada da função inversa dessa restrição em $f(2)$.

(v) Determine o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de $x - 2$ que aproxima a função $f$ em $]3/2, 5/2[$.

**Resolução.**

(i)

$$\lim_{x\to 1^-} \ln\left(1+x^2\right) = \ln(2) = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \pi/2 \neq f(1)$$

A função $f$ não é contínua no ponto 1 logo não é diferenciável no ponto 1.

(ii) Em cada um dos intervalos, $x > 1$ e $x < 1$, a função é diferenciável, pois resulta da composição de funções diferenciáveis.
$f' : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2}\,, & \text{se } x < 1. \\ \dfrac{-1}{(x-1)^2+x^2}\,, & \text{se } x > 1; \end{cases}$$

(iii) Tem-se para $x < 1$, $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ e $f'(0) = 0$.
Para $-\infty < x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é uma função decrescente. Para $0 \leq x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é uma função crescente. Concluindo-se que $f(0) = 0$ é minimo local.
Para $x > 1$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2+x^2} < 0 \Rightarrow f$ é uma função decrescente sem extremos locais

(iv) Para $x > 1$ tem-se $f'(x) < 0$ concluindo-se que $f$ é uma função estritamente decrescente. Consequentemente $f$ é injectiva e tem inversa. Seja $g = f^{-1}$. $f(2) = \operatorname{arctg} 2$

$$g'(\operatorname{arctg} 2) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{-1}{(1+2^2)}} = -5.$$

(v) Sendo a função $f$ pelo menos 2 vezes diferenciável para $x > 1$

$$P_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + f''(2)(x-2)^2\,.$$

Ora

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2+x^2}\,, \quad f''(x) = \frac{4x-2}{(2x^2-2x+1)^2}\,.$$

e os coeficientes de $P_2$, são: $f(2) = \operatorname{arctg} 2$, $f'(2) = -1/5$ e $f''(2) = 6/5$.

▪

**2.** Mostre que a equação

$$3x + e^x = 0$$

tem solução. Essa solução é única? Justifique.

**Resolução.** Seja $f(x) = 3x + e^x$, $f$ é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Como $f(-1).f(0) < 0$, do teorema de Bolzano tem-se a existência de pelo menos um zero da função $f$. Como $f'(x) = 3 + e^x > 0$ a função é estritamente monótona em $\mathbb{R}$ logo injetiva e assim $f$ tem um único zero. Ou seja existe uma única solução para a equação

$$3x + e^x = 0$$

▪

**3.** Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$(i)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x - \operatorname{tg} x}, \qquad (ii)\ \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{x}{x-2}\right)^{x-2}.$$

**Resolução.**

(i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x - \operatorname{tg} x} = 1/2,$$

da regra de Cauchy, uma vez que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x - \operatorname{tg} x} = 0/0$ e

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x - x)'}{(x - \operatorname{tg} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{1 - \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{\cos x + 1} = 1/2$$

(ii)

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x}{x-2}\right)^{x-2} = e^0 = 1$$

de facto, uma vez que

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x}{x-2}\right)^{x-2} = e^{\lim_{x\to 2^+}(x-2)\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)}$$

e como da regra de Cauchy, $\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)}{1/(x-2)} = \infty/\infty$ tem-se

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{(\ln\left(\frac{x}{x-2}\right))'}{(1/(x-2))'} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-2/(x(x-2))}{-1/(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)}{x} = 0$$

■

**4.** Seja $f$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0)=0$ e cuja derivada é uma função crescente, mostre usando teorema de Lagrange que a função $g(x)=f(x)/x$ é crescente para $x\in\mathbb{R}^+$.

**Resolução.**
Sendo função $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, aplicando o teorema de Lagrange à função $f$ no intervalo $[0,x]$, $x\in\mathbb{R}^+$, existe $c_x \in ]0,x[$ tal que

$$f'(c_x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = g(x)\,.$$

Por outro lado, como $g$ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, para $x>0$

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{1}{x}(f'(x)-g(x))$$

Sendo $f'(x)$ crescente, tem-se $f'(c_x)\le f'(x)$, pois $c_x<x$, donde $f'(x)-g(x)\ge 0$ Ou seja $g'(x)\ge 0$ para $x>0$, sendo $g(x)$ crescente em $\mathbb{R}^+$. ■