Cálculo Diferencial e Integral I

1ºteste - LERC, LEGI, LEE, LEIC-T

24 de abril de 2021 - 9:30 horas

I (8 val.)

1. (3.5 val.) Sejam as sucessões

$$u_n = \frac{n\,2^n + 4^{n+1}}{n^4 \ + 2^{2n}}\,, \qquad v_n = \frac{(n!)^2 n^n}{(2n)!}\,, \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites das sucessões u_n, v_n e $\sqrt[n]{v_n}$.

Resolução.

$$u_n = \frac{n\,2^n + 4^{n+1}}{n^4 \ + 2^{2n}} = \frac{4^n}{2^{2n}}\,\frac{\frac{n\,2^n}{4^n} + 4}{\frac{n^4}{2^{2n}} + 1} = \frac{\frac{n}{2^n} \ + 4}{\frac{n^4}{4^n} \ + 1} \to \frac{0 \ + 4}{0 \ + 1} = 4\,.$$

Da escala de sucessões, $\frac{n^a}{b^n} \to 0\,, a > 0\,, b > 1$.

Para determinar o valor do limite de v_n, precisamos de calcular o seguinte limite,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{((n+1)!)^2(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\dfrac{(n!)^2 n^n}{(2n)!}} = \frac{((n+1)!)^2(n+1)^{n+1}}{(n!)^2 n^n} \cdot \frac{(2n)!}{(2(n+1))!} =$$

$$= \frac{((n+1)n!)^2(n+1)^n(n+1)}{(n!)^2 n^n} \cdot \frac{(2n)!}{(2(n+1))(2n+1)(2n)!} =$$

$$= (n+1)^2(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{(2(n+1))(2n+1)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{(n+1)^2}{2(2n+1)} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{(n+1)^2}{2(2n+1)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{(1+1/n)^2}{2(2+1/n)}\,.\,n\,. \to e/4.(+\infty) = +\infty$$

Como $\lim \dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 1$, $v_n \to +\infty$.

$\lim \sqrt[n]{v_n} = \lim \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = +\infty$.

■

2. Considere a sucessão de termos positivos, x_n, definida por

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1 + 2x_n}{4} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) (1.5 val.) Mostre por indução matemática que a sucessão x_n é decrescente.

(ii) (2.0 val.) A sucessão x_n é convergente? Justifique e determine, caso exista, o limite da sucessão x_n.

(iii) (1.0 val.) Seja Y o conjunto dos termos da sucessão $y_n = (-1)^n x_n$, determine, caso existam, o supremo, infimo, máximo e minímo do conjunto Y. Justifique e indique o conjunto dos sublimites da sucessão $y_n + x_n$.

Resolução.

(i) $x_2 = \dfrac{1+2x_1}{4} = \dfrac{3}{4} < x_1$ Queremos provar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n < 0$, através da indução matemática:

- $n = 1$: $x_2 - x_1 = -\frac{1}{4} < 0$.
- Fixado m, pretende-se provar, que se $x_{m+1} - x_m < 0$ então $x_{m+2} - x_{m+1} < 0$. Da definição de sucessão x_n, tem-se

$$x_{m+2} - x_{m+1} = \frac{1+2x_{m+1}}{4} - \frac{1+2x_m}{4} = \frac{x_{m+1} - x_m}{2} < 0\,.$$

Tem-se assim que $x_{m+2} - x_{m+1} < 0$.

Pelo princípio de indução matemática $x_{n+1} - x_n < 0$, $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}$, isto é, a sucessão x_n é estritamente decrescente.

(ii) Da alínea anterior, x_n é monótona, como também é limitada, pois sendo x_n decrescente $x_n \leq x_1 = 1$ e uma sucessão de termos positivos, $0 \leq x_n \leq 1$, logo a sucessão é convergente. Seja $x = \lim x_n$. Como x_{n+1} é uma subsucessão de x_n, x_{n+1} é também convergente para x. Por outro lado a sucessão $\dfrac{1+2x_n}{4}$ é igualmente convergente pois resulta da adição e quociente de sucessões convergentes, sendo $\lim(\dfrac{1+2x_n}{4}) = \dfrac{1+2x}{4}$.
Uma vez que $x_{n+1} = \dfrac{1+2x_n}{4}$, $\quad n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$x = \frac{1+2x}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\,.$$

(iii) A sucessão $y_n = (-1)^n x_n$ é limitada, pois y_{2n}, y_{2n-1} são sucessões convergentes logo limitadas. A sucessão y_{2n} é estritamente decrescente de termos positivos e y_{2n-1} é estritamente crescente de termos negativos, assim $y_1 \leq y_{2n-1} < y_{2n} \leq y_2$. Assim o conjunto Y tem máximo, y_2=sup Y, e mínimo, y_1= inf Y. O conjunto dos sublimites de $y_n + x_n$=$(-1)^n x_n + x_n$ é $\{0, 1\}$.

▪

II (12 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{(1-x)^2}\,, & \text{se } x \geq 0. \\ x^2 \cos\left(\frac{\pi}{-x}\right) + \operatorname{arctg}(x+1)\,, & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

(i) (1.0 val.) A função f é contínua em $\mathbb{R}$? Justifique.

(ii) (1.0 val.) Seja a_n uma sucessão convergente para 2, justifique que a sucessão $f(a_n)$ é uma sucessão convergente e determine o valor de $\lim f(a_n)$.

(iii) (2.5 val.) Defina a função derivada de f.

(iv) (1.5 val.) Indique, para $x > 0$, os intervalos de monotonia e os extremos de f, caso existam. Justifique.

(v) (1.0 val.) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1.

Resolução.

(i) Não, pois a função não é contínua no ponto zero.

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{-x}\right) + \operatorname{arctg}(x+1) = \pi/4 \neq f(0) = e$$

uma vez que $\lim_{x\to 0^-} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{-x}\right) = 0$, pois $|\cos\left(\frac{\pi}{-x}\right)| \leq x^2$ e $\lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$.
Para $x > 0$, a função é contínua em cada ponto, uma vez que resulta da composição de funções elementares.
Para $x < 0$, a função também é contínua em cada ponto, uma vez que resulta do produto, soma e composição de funções elementares.
A função é contínua em $x \neq 0$.

(ii) Sendo a função f contínua no ponto dois e a sucessão a_n convergente para dois, através da continuidade segundo Heine, o limite da sucessão $f(a_n)$ é $f(2) = e$.

(iii) A função não é contínua em 0 logo f não é diferenciável em 0.

Para $x > 0$, a função é diferenciável em cada ponto, uma vez que resulta da composição de funções elementares.
Para $x < 0$, a função também é diferenciável em cada ponto, uma vez que resulta do produto, soma e composição de funções elementares.

$$f'(x) = \begin{cases} (-2+2x)e^{(1-x)^2}, & \text{se } x > 0. \\ 2x\cos\left(\frac{\pi}{-x}\right) - \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{-x}\right) + \dfrac{1}{1+(x+1)^2}, & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

(iv) A função f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$. $f'(x) < 0$ em $]0,1[$ logo a função f é estritamente decrescente em $]0,1[$ e de $f'(x) > 0$ em $]1,+\infty[$ a função f é estritamente crescente em $]0,1[$, como $f'(1) = 0$ em $\mathbb{R}^+$, f(1) é minimo local.

(v) Como a função f é diferenciável em $x = -1$, a equação da reta tangente ao gráfico da função f, no ponto de coordenadas $(-1, f(-1))$ é a seguinte:

$$y = f(-1)+f'(-1)(x+1) = -1+3(x+1) = 3x+2, \quad \text{uma vez que} \quad f(-1) = -1,\ f'(-1) = 3.$$

▪

2. (3.0 val.) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites:

$$(i)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arcsen}(\sqrt{x})}{2\operatorname{sen}(\sqrt{x})}, \qquad (ii)\ \lim_{x\to +\infty} \left(\ln(x^2+1)\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Resolução.

$$(i)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arcsen}(\sqrt{x})}{2\operatorname{sen}(\sqrt{x})} = 0/0, (ind.)$$

da regra de Cauchy, uma vez que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\operatorname{arcsen}(\sqrt{x}))'}{(2\operatorname{sen}(\sqrt{x}))'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}2\sqrt{x}}}{\frac{2\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{2\cos(\sqrt{x})} = \frac{1}{2}.$$

donde vem $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{arcsen}(\sqrt{x})}{2\operatorname{sen}(\sqrt{x})} = \frac{1}{2}$.

(ii) $\lim_{x\to +\infty} \left(\ln(x^2+1)\right)^{\frac{1}{x^2}} = \infty^0$, (ind.)
assim

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\ln(x^2+1)\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\ln(x^2+1)\right)}{x^2}}$$

e, uma vez que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(\ln(x^2+1)\right)}{x^2}$$

e da regra de Cauchy, pois

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\ln\left(\ln(x^2+1)\right)\right)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{(x^2+1)\ln(x^2+1)} = 0$$

donde vem

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\ln(x^2+1)\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1$$

■

3. (2.0 val.) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $g(0) = 0$ e $p \in \mathbb{N}$. Mostre que se $|g'(x)| < x^p$, para $x > 0$, então $|g(x)| < x^{p+1}$, $x > 0$.

Resolução. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, logo para $x > 0$, g é contínua em $[0, x]$, diferenciável em $]0, x[$, do teorema de Lagrange existe $c \in]0, x[$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{g(x)}{x}$$

$$|g'(c)| < c^p \quad \text{uma vez que} \quad 0 < c$$

como $c < x$

$$\left|\frac{g(x)}{x}\right| < c^p < x^p$$

logo

$$|g(x)| < x^{p+1}$$

■