

Cálculo Diferencial e Integral I
Recurso - LEIC-T, LEE, LETI, LEGI - versão B

8 de fevereiro de 2023 - 13 horas - duração: 120 minutos

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1. (1,0 val.) Determine em $\overline{\mathbb{R}}$, se existirem, os limites das sucessões de termos reais

$$a_n = \frac{e^n + 3n}{1 + 2n!} \quad \text{e} \quad b_n = \left(\frac{n}{n+3} \right)^{n^2}$$

2. (2,5 val.) Considere a sucessão de termos positivos definida por

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{4} \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (i) Mostre por indução matemática que u_n é uma sucessão decrescente.
(ii) A sucessão u_n é uma sucessão convergente? Justifique e em caso afirmativo determine o seu limite.
(iii) Seja U , o conjunto dos termos da sucessão u_n . Indique, caso existam, o supremo, infimo, máximo e mínimo de U . Justifique.
3. (1,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right), & \text{se } x < 0; \\ \frac{x}{\ln((x+1)^2)}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Determine os limites laterais de f em 0 e conclua se a função f é prolongável por continuidade em $x = 0$. Justifique.

4. (0,5 val.) Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com limites positivos quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ e tal que $g(0) < 0$. Analise se a equação

$$g(x) = 0$$

tem pelo menos duas soluções reais.

5. (**MAP 2**) (2,5 val.) Considere a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$$

- (i) (**MAP 2**) Defina a função derivada e determine, caso existam, os intervalos de monotonia e extremos relativos de h em \mathbb{R} .
(ii) (**MAP 2**) Escreva a fórmula de Taylor com o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de x associada à função h em $[-1, 1]$.

6. (MAP 2) (2,0 val.) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites:

$$(i)(\text{MAP2}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x - 1 + e^x}, \quad (ii)(\text{MAP2}) \lim_{x \rightarrow +0} (\text{sen}(x))^x.$$

7. (MAP 2) (0,5 val.) Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, tal que $\varphi(0) = 0$ e $p \in \mathbb{N}$. Mostre que se $|\varphi'(x)| < x^p$, para $x > 0$, então $|\varphi(x)| < x^{p+1}$.

8. (MAP 2) (2,5 val.) Determine uma primitiva para cada uma das seguintes funções:

$$(i)(\text{MAP2}) \frac{e^x}{1 + 2e^x}, \quad (ii)(\text{MAP2}) \frac{2x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2(x + 1)}.$$

9. (1,0 val.) Determine o valor do integral:

$$i) \int_1^e x \ln x \, dx$$

10. (1,0 val.) Seja A a região limitada pelas linhas de equação:

$$y = x^2 - 4 \quad \text{e} \quad y = 2 - |x|.$$

Esboce graficamente a região A e calcule a sua área.

11. (2,0 val.) Seja a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva

$$F(x) = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{t^3}{f(t)} \, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

i) Defina a função derivada de F .

ii) Determine o valor de $F(8)$ quando $f(x) = 2\sqrt{1 + t^2}$.

12. (2,0 val.) Analise a natureza das séries, e em caso de convergência, determine a soma de uma delas.

$$i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{4^{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

13. (1,0 val.) Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n(n+3)}.$$

Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a série converge absolutamente, converge simplesmente ou é uma série divergente.

14. (0,5 val.) Sabendo que a série de termos positivos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série convergente,

mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{na_n}{3n+5}$ é convergente.