Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral I

Cursos de LEBiol, LEBiom, LEIC-A, LEIC-T

Exame de 1.ª Época - 10 de fevereiro de 2022, **13h-15h**, **VERSÃO B.1**

Duração: 2 horas

1.

$$\left\{x \in \mathbb{R} : |2x+1| \geq x^2\right\} = \{-1\} \cup [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}].$$

$$A = [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}] \cap]-\infty, 0] = \{-1\} \cup [1-\sqrt{2}, 0].$$

$\sup(A \setminus \mathbb{Q}) = 0$, não existe $\max(A \setminus \mathbb{Q})$, $\min(A \setminus \mathbb{Q})$=$\inf(A \setminus \mathbb{Q}) = 1-\sqrt{2}$.

2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right), & x > 0 \\ \arctan(x^2) + b, & x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $x = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right) = b$. Como $\sin\left(\frac{2}{x}\right)$ é uma função limitada e $\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$, então
$\lim_{x\to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right) = 0$ e $b = 0$.

(b)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{2}{x}\right) - 2\cos\left(\frac{2}{x}\right), & x > 0 \\ \frac{2x}{1+x^4}, & x < 0 \end{cases}$$

(c) Estude f quanto à diferenciabilidade em $x = 0$.

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} x \sin\left(\frac{2}{x}\right) = 0$$

uma vez que $\sin\left(\frac{2}{x}\right)$ é uma função limitada e $\lim_{x\to 0^+} x = 0$.

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x^2) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{1+x^4} = 0 \quad \text{da regra de Cauchy.}$$

Como $f'_d(0) = f'_e(0)$, f é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

(d) Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(2) = -1$, $g'(2) = -4$ e f' diferenciável em -1 então $f' \circ g$ é diferenciável em 2 e $(f' \circ g)'(2) = g'(2) \cdot f''(g(2)) = (-4) \cdot f''(-1)$.

$$f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}, \quad f''(-1) = -1$$

Logo $(f' \circ g)'(2) = 4$.

(e) O polinómio de Taylor de f de ordem dois no ponto -1 é

$$P_2(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2$$

com $f(-1) = \pi/4$, $f'(-1) = -1$ e $f''(-1) = -1$.

3.

$$\text{(a) } P\left(\sinh^2(3x-1)\cosh(3x-1)\right) = \sinh^3(3x-1)/9$$

$$\text{(b) } P\left(\frac{3e^{-x}}{3+e^x}\right) = -x/3 - e^{-x} + \frac{1}{3}\ln(e^x+3)\,,$$

uma vez que primitivando por substituição, utilizando a mudança de variável $t = e^x$ i.e. $x = u(t) = \ln t$

$$P\left(f(u(t))u'(t)\right) = P\left(\frac{3}{t(3+t)}\frac{1}{t}\right) = P\left(\frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \frac{B}{t+3}\right)$$

$$= A_1 \ln|t| - \frac{A_2}{t} + B\ln|t+3|$$

com $A_1 = -1/3$, $A_2 = 1$ e $B = 1/3$.

4. O valor da área da região plana limitada pelas seguintes curvas:

$$y = x^2 - 1, \quad y = -\ln x, \quad y = -1.$$

é obtido por

$$\int_0^1 ((x^2-1)+1)dx + \int_1^e (-\ln(x)+1)dx = 1/3 + (e-2) = e - 5/3$$

5.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \sin(\sqrt{t})dt}{e^{x^2} - x^2 - 1} \quad \text{ind}\, 0/0$$

Do teorema fundamental do cálculo e da regra de Cauchy (RC) tem-se

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x\sin x}{2xe^{x^2} - 2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{e^{x^2} - 1} = +\infty \quad .$$

(2,0 val.) 6. (a) Mostre, usando o método de indução matemática, que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,
Para $n = 1$ tem-se $0 = 0$ prop. verdadeira.
Fixado $n \in \mathbb{N}$ mostre-se que se

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-k)k!}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} - \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \quad \text{Hip. de indução, (HI),}$$

então

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(1-k)k!}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} - \frac{(n+2)!}{2^{n+2}} \quad \text{Tese.}$$

Assim

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(1-k)k!}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-k)k!}{2^{k+1}} + \frac{(1-(n+1))(n+1)!}{2^{n+2}} =_{\text{(HI)}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} - \frac{n(n+1)!}{2^{n+2}} = \frac{1}{2} - \frac{(n+2)!}{2^{n+2}}$$

(b) Da alínea a), a sucessão das somas parciais, S_n da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-k)k!}{2^{k+1}}$ é

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-k)k!}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} - \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$$

e uma vez que a sucessão

$$\frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \to +\infty$$

então $S_n \to +\infty$ e portanto a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-k)k!}{2^{k+1}}$ é divergente.

7. (a)

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+4}} \qquad \text{série simplesmente convergente.}$$

A série, da classe das séries alternadas é convergente uma vez que satisfaz as condições do critério de Leibnitz. A série dos módulos, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$ é uma série divergente por comparação com as séries de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, com $p = 1$.

$$\text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{n^n} \qquad \text{série de termos positivos convergente}$$

Estão satisfeitas as condições do critério de D'Alembert

$$a_n = \frac{(n+1)!}{n^n} \quad \text{e} \quad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} < 1.$$

A série é assim absolutamente convergente.

(b) Determine-se o raio de convergência, r,

$$r = \lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$$

Da condição $|2x-1| < r = 1$ tem-se o que é habitualmente designado por intervalo de convergência da série que é neste caso$]0,1[$. Neste intervalo a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n^2+4}}$ é absolutamente convergente. No $ext(]0,1[)$ a série de potências é divergente. Falta-nos analisar os pontos de fronteira do intervalo de convergência

Para $x = 0$, tem-se precisamente a série numérica da alínea anterior em (i) e a série é simplesmente convergente.

Para $x = 1$, tem-se a série numérica correspondente à série numérica dos módulos da alínea anterior e é uma série é divergente.

8. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma uma função positiva e diferenciável com derivada limitada em $\mathbb{R}$ ie. $\exists K > 0$ tal que $|h'(x)| \leq K$ para $x \in \mathbb{R}$.

   Considerando a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \dfrac{h(x)}{x^6 + 3}$. e aplicando o teorema de Lagrange à função h no intervalo $[0, x]$ para $x \in \mathbb{R}^+$, existe $c_x \in]0, x[$ tal que $h'(c_x) = \frac{h(x)-h(0)}{x-0}$ ou seja $h(x) = xh'(c_x) + h(0)$.

   Tem-se
   $$g(x) \leq \frac{xK + h(0)}{x^6 + 3} \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

   Como $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{xK + h(0)}{x^6 + 3} = 0$, conclui-se que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (enquadramento de funções). Analogamente se obtém $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

   Seja $\delta = \frac{g(0)}{2}$, da definição de limite em $\pm\infty$ sabemos da existência de $L > 0$ tal que para $|x| > L$, $g(x) \in]-\delta, \delta[$. Sendo g contínua em $[-L, L]$ do teorema de Weierstrass g tem um máximo M nesse intervalo. Como $M \geq g(0)$ então M é o máximo absoluto de g.