Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral I

Cursos de LEBiol, LEBiom, LEIC-A, LEIC-T

Exame de 1.ª Época - 10 de fevereiro de 2022, **13h-15h**, **VERSÃO B.1**

Duração: 2 horas

Nome: ____________________________________ N.º aluno: __________ Curso: ________

Escreva a versão e numere as páginas do seu caderno de respostas e, à medida que resolver a prova, indique as páginas de resolução de cada pergunta na coluna *Páginas* da tabela. **Caso não o faça as suas respostas poderão não ser consideradas.**

Pergunta	Cotação	Páginas	Classificação
1	1.0		
2	6.0		
3	2.5		
4	1.5		
5	2.0		
6	2.0		
7	3.0		
8	2.0		

Apresente e justifique todos os cálculos

(1,0 val.) 1. Considere o seguinte conjunto:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |2x+1| \geq x^2 \quad \text{e} \quad x \leq 0 \right\}.$$

Indique, se existirem, o supremo, máximo, mínimo e ínfimo do conjunto $A \setminus \mathbb{Q}$.

(6,0 val.) 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right), & x > 0 \\ \arctan(x^2) + b, & x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Prove que $b = 0$.

(b) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$.

(c) Estude f quanto à diferenciabilidade em $x = 0$.

(d) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(2) = -1$ e $g'(2) = -4$. Calcule $(f' \circ g)'(2)$.

(e) Determine o polinómio de Taylor de f de ordem dois no ponto -1.

(2,5 val.) 3. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{(a)}\ \sin^2(3x-1)\cos(3x-1) \qquad \text{(b)}\ \frac{3e^{-x}}{3+e^x}.$$

(1,5 val.) 4. Esboce e calcule a área da região plana limitada pelas seguintes curvas:

$$y = x^2 - 1, \quad y = -\ln x, \quad y = -1.$$

(2,0 val.) 5. Calcule, justificando, o limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin(\sqrt{t})dt}{e^{x^2} - x^2 - 1}.$$

(2,0 val.) 6. (a) Mostre, usando o método de indução matemática, que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-k)k!}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} - \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}.$$

(b) Indique, justificando, se a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-k)k!}{2^{k+1}}$ é convergente ou divergente.

(3,0 val.) 7. (a) Estude a natureza das seguintes séries, indicando se são divergentes, absolutamente convergentes ou simplesmente convergentes.

$$\text{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+4}} \qquad \text{(ii)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$$

(b) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série de potências é simplesmente convergente, absolutamente convergente e divergente.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n^2+4}}.$$

(2,0 val.) 8. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma uma função positiva e diferenciável com derivada limitada em $\mathbb{R}$. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \dfrac{h(x)}{x^6+3}$.

Calcule os limites de g em $-\infty$ e $+\infty$ e prove que a função g tem máximo global. (Sugestão: use o teorema de Lagrange.)

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral I

Cursos de LEBiol, LEBiom, LEIC-A, LEIC-T

Exame de 1.ª Época - 10 de fevereiro de 2022, **13h-15h**, **VERSÃO B.2**

Duração: 2 horas

Nome: ____________________ N.º aluno: __________ Curso: ________

Escreva a versão e numere as páginas do seu caderno de respostas e, à medida que resolver a prova, indique as páginas de resolução de cada pergunta na coluna *Páginas* da tabela. **Caso não o faça as suas respostas poderão não ser consideradas.**

Pergunta	Cotação	Páginas	Classificação
1	1.0		
2	6.0		
3	2.5		
4	1.5		
5	2.0		
6	2.0		
7	3.0		
8	2.0		

Apresente e justifique todos os cálculos

(1,0 val.) 1. Considere o seguinte conjunto:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |1-2x| \geq x^2 \quad \text{e} \quad x \geq 0 \right\}.$$

Indique, se existirem, o supremo, máximo, mínimo e ínfimo do conjunto $A \setminus \mathbb{Q}$.

(6,0 val.) 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right), & x > 0 \\ \arctan(x^3) + b, & x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Prove que $b = 0$.

(b) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$.

(c) Estude f quanto à diferenciabilidade em $x = 0$.

(d) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(3) = -1$ e $g'(3) = \frac{1}{3}$. Calcule $(f' \circ g)'(3)$.

(e) Determine o polinómio de Taylor de f de ordem dois no ponto -1.

(2,5 val.) 3. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{(a)}\ \sin(2x+1)\cos^2(2x+1) \qquad \text{(b)}\ \frac{2+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)\sqrt{x^3}}.$$

(1,5 val.) 4. Esboce e calcule a área da região plana limitada pelas seguintes curvas:

$$y = \ln x, \quad y = 2(1-x^2), \quad y = 2.$$

(2,0 val.) 5. Calcule, justificando, o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^4) - 1}{\int_0^{x^4} (e^{\sqrt{t}} - 1)dt}.$$

(2,0 val.) 6. (a) Mostre, usando o método de indução matemática, que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2-k)k!}{3^{k+2}} = \frac{1}{9} - \frac{(n+1)!}{3^{n+2}}.$$

(b) Indique, justificando, se a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-k)k!}{3^{k+2}}$ é convergente ou divergente.

(3,0 val.) 7. (a) Estude a natureza das seguintes séries, indicando se são divergentes, absolutamente convergentes ou simplesmente convergentes.

$$\text{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}} \qquad \text{(ii)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}$$

(b) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série de potências é simplesmente convergente, absolutamente convergente e divergente.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n+3}}.$$

(2,0 val.) 8. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma uma função positiva e diferenciável com derivada limitada em $\mathbb{R}$. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \dfrac{h(x)}{x^4+2}$.

Calcule os limites de g em $-\infty$ e $+\infty$ e prove que a função g tem máximo global. (Sugestão: use o teorema de Lagrange.)