Critério de D'Alembert

$a_n > 0$ e $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

1) se $\ell < 1 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ é uma série convergente

2) se $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ é uma série divergente

$\ell < 1$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \ \forall n > p \ \ \ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon$ escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $\underbrace{\ell + \varepsilon}_{r} < 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r < 1 \Rightarrow \sum a_n$ é convergente
$<$ razão

cont. NOTA

$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n!}{n^n} : a_n$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)\cancel{n!}\, n^n}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n \cancel{n!}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-1} = \ell < 1$

$\ell = \frac{1}{e} < 1$, do critério de D'Alembert a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n!}{n^n}$ é uma série convergente

Critério de Cauchy

$a_n > 0$ e $\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell$

1) se $\ell < 1 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ é uma série convergente

2) se $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ é uma série divergente

Critério da raiz

Tipos de convergência de séries

- A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diz-se **absolutamente convergente** se as séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ são ambas séries convergentes
- A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diz-se **simplesmente convergente** se $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é uma série convergente e $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ é uma série divergente

Teorema

$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ é uma série convergente $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é uma série convergente

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + |a_n|) - \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

$\underline{0 \leq a_n + |a_n|} \leq 2|a_n|$

do critério geral de comparação $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + |a_n|)$ é convergente e a soma de 2 séries convergentes é convergente

ex:

Estude a natureza da série seguinte e no caso de convergência indique o tipo de convergência

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{2^n}$$

Vamos estudar $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}(n)}{2^n}\right|$, $\left|\frac{\operatorname{sen}(n)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ $\quad |\operatorname{sen}(n)| \leq 1$

séries de termos positivos

Como a condição do C.G.C é satisfeita $\left|\frac{\operatorname{sen}(n)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ e $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ a série geométrica convergente $\left(r = \frac{1}{2} < 1\right)$ a série $\sum \left|\frac{\operatorname{sen}(n)}{2^n}\right|$ é convergente e a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\operatorname{sen}(n)}{2^n}$ é também convergente (a convergência de $\sum \frac{\operatorname{sen} n}{2^n}$ é absoluta

Aplicação à teoria de séries

$0{,}9(9)$ $\quad 0{,}9 = \frac{9}{10}$ $\quad + \frac{0{,}09}{0{,}99} = \frac{9}{100}$ $\quad \frac{9}{100} = \frac{9}{10^2}$ $\quad \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + = 9\sum_{n=1}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 9\,\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} =$

série geométrica convergente de razão $r = 1/10, |r| < 1$

$= \frac{5}{9} = 1$

T.P.C.
1.(15)

Séries e cálculo aproximado para séries para séries de termos positivos $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Supondo que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é uma série convergent do critério da razão, $\lim S_n = S = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$

$S = S_p + r_p = \sum_{n=1}^{p} a_n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K < 1$ existe $K_p \leq 1$ $n > p$ K_p é majorante $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$S - S_p = r_p$

$r_p = a_{p+1} + a_{p+2} + \dots$

$r_p = a_{p+1}\left(1 + \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} + \frac{a_{p+3}}{a_{p+1}} \cdot \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} + \dots\right) \leq$

$r_p \leq \frac{a_{p+1}}{1-K_p}$

$K_p = \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}}$

$\leq a_{p+1}(\underbrace{1 + K_p + K_p^2 + \dots + K_p^n + \dots}_{\frac{1}{1-K_p}})$

(caso seja decrescente)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 = l < 1$

Determine p por forma que $r_p < \frac{1}{100}$

$S - S_p = r_p < \frac{\frac{1}{(p+1)!}}{1 - \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}}} = \frac{\frac{1}{(p+1)!}}{1 - \frac{1}{p+2}}$

$r_p < \underbrace{\frac{1}{(p+1)!} \cdot \frac{p+2}{p+1}}_{p=2} < \frac{1}{100}$

T.P.C.

$\frac{e-1}{S} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

Convergência absoluta e convergência simples de séries

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ ambas convergem

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge
$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ diverge

Teorema

$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge

$\cancel{\Leftarrow}$

e

$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ neste caso $\sum a_n$ converge absolutamente

Estude a natureza da série $\quad 1. \sum \frac{(-1)^n}{n^2+1} \quad 2. \sum (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

1) $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right| = \sum \frac{1}{n^2+1}$

$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ é uma série de Dirichlet convergente e $\alpha = 2 > 1$

do critério geral de comparação a série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ é convergente $\rightarrow \sum \frac{1}{n^2+1}$?

$\Downarrow$

a série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ é também convergente e a sua convergência é absoluta

2) Critério para séries alternadas (Leibnitz)

$a_n > 0$, a_n decrescente — é preciso verificar que é decrescente para depois usar diretamente

a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} a_n$ é convergente $\Leftrightarrow a_n \to 0$

exemplo em como é fundamental que a_n seja decrescente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{converge}} + \underbrace{\sum \frac{1}{n}}_{\text{série diverge}}$$

Série diverge

$\sum (-1)^n \frac{1 + (-1)^n}{n} \rightarrow a_n$ não é decrescente

NOTA:
A adição de uma série divergente com uma série convergente é sempre uma série divergente.

$\sum \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$, $\sum \left| \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \right| = \sum \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{a_n}$

$\frac{a_n}{b_n = \frac{1}{n}} = \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$

$\sum | \, |$ e $\sum 1/n$ são ambas divergentes

do critério de Leibnitz é convergente

A convergência da série 2. é simples

séries de potências de x

Convenção

$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$

Seja $r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ $\left(\text{ou } \lim \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \right)$ então a série de potências de x é absolutamente convergente para $|x| < r$ ($x \in]-r, r[$) e diverge para $x \in \mathbb{R} \setminus [-r, r]$

Os casos $x = \pm r$ são estudados à parte

NOTAS:

1) r é designado por raio de convergência
2) $]-r,r[$ é designado por intervalo de convergência

Estude para os valores de $x \in \mathbb{R}$ a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

$a_n = \frac{1}{n}$, $r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1$

quando o intervalo de convergência $]-1,1[$ onde a série de potências converge absolutamente
a série diverge quando $x \in \underbrace{]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]}$

Falta estudar os casos $x = \pm 1$

$x=-1$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}$ do critério de Leibnitz a série é convergente (a convergência é simples pq $\sum\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$

$x = 1$, $\sum \frac{1}{n}$ é uma série divergente

Domínio de convergência
- conv. absoluta $x \in]-1,1[$
- divergência em $x=1$
- convergência simples em $x=-1$
- divergência em $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$

Problemas

12/01/2023

CNC: $\sum a_n$ conv. $\Rightarrow a_n \to 0$

série de termos positivos Critérios: comparação

D'Alenbert

aplicar quando a direita de b^n

aplicares se pelo menos uma das expressões por geométrica

$\lim \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}^+$ então $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n, \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ são da mesma natureza

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, $l<1 \Rightarrow \sum a_n$ conv.

Escala de sucessões $n^a << b^n << n! << n^n$

ex:

Estude a natureza da série:

1) $\sum \frac{n^2}{n+2^n}$

$\underbrace{\frac{n^2}{n+2^n}}_{a_n} / \underbrace{\frac{n^2}{2^n}}_{b_n} = \frac{1}{\frac{n}{2^n}+1} \to 0 \quad \frac{1}{0+1} = 0$ nada se pode concluir quanto à natureza da série

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2$

$\frac{n^2}{2^n} \to 0 \quad n^2 << 2^n$ $\quad \sum \frac{n^2}{2^n}$ $\quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{n^2}}{\frac{2^{n+1}}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{2}$

$l < 1$

Conclusão: $\sum b_n$ é uma série convergente do critério de D'Alenbert
Como do critério de comparação as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são da mesma natureza logo a série $\sum a_n$ é convergente

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\frac{n}{2^n}+1} \to \frac{1}{0+1} \to 0$

2) $\sum \frac{n^2}{n(n^2+1)}$ (a_n)

$\sum \frac{n^2}{n^3} = \sum \frac{1}{n}$ (b_n)

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n^2}{n(n^2+1)}}{1/n} = 1 > 0$

NOTA (IMPORTANTE):

$a_n \leq b_n$ $\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

$a_n = \frac{n^2}{n(n^2+1)} < \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$ n é possível usar o critério

O de D'Alembert não funciona para nº (dá sempre 1)

Séries de Dirichlet

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ser. conv. $\alpha > 1$

Séries de potências de x

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $\quad x \in \mathbb{R}$ $\quad \overset{\text{raio de convergência}}{r} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, $|x| < r$ a série converge absolutamente para $x \in]-r, r[$

ex 3:

Estude o domínio de convergência da série de potências de x.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} x^n$

$a_n = \frac{1}{n^2+1}$ $\quad r = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{(n+1)^2+1}} = 1$, série de potências de x converge absolutamente para $x \in]-1, 1[$ e diverge no exterior $[-1,1]$

$x = -1$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} (-1)^n$

são duas séries numéricas

$x = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} 1^n$ $\quad \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ $\quad \sum \frac{1}{n^2}$ série convergente de Dirichlet

$\Downarrow$

$\sum \frac{1}{n^2+1}$ série convergente

$\Downarrow$

é absolutamente convergente $\quad \sum \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ é tb convergente pois $\sum |\,| = \sum \frac{1}{n^2+1}$

4) $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ $\quad r = 1$ $\quad]-1, 1[$ conv. absolutamente

$x = -1$ $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge do critério de Leibnitz e a sua convergência é simples

Leibnitz
$a_n > 0$ a_n decrescente
$\sum (-1)^n a_n$ conv.
sse $a_n \to 0$

$x = 1$ $\sum \frac{1^n}{\sqrt{n}}$ é divergente série Dirichlet $\alpha < 1$

séries de potências de x

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \, , \, x \in \mathbb{R}$ $\qquad \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x|$

$\sum |a_n x^n|$ a série é convergente quando o $\lim \left|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right| < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \Leftrightarrow |x| < \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$\sum |a_n x^n|$ a série é divergente quando $|x| > \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

r designamos de raio de convergência, e $r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \left(= \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}\right)$

Teorema

Seja a série de potências de x $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para $x \in]-r, r[$

diverge para $x \in ext(]-r, r[)$

NOTA:

Falta estudar a natureza da série quando $x = \pm r$.

NOTA:

Para qualquer $p \in \mathbb{N}_0$, as séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n x^n$ são da mesma natureza.

Observação

O domínio de convergência da série de potências de x contém o intervalo de convergência, $]-r, r[$ e o resultado do estudo da natureza para $x = \pm r$.

exemplos:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} n! \, x^n \, , \quad r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$ $\qquad a_n = n!$

   $\Rightarrow r = 0$, a série de potências é convergente apenas para $x = 0$

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\qquad r = +\infty$, a série de potências de x é absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n!}$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n} \xrightarrow[y = x-1]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n}$ $\qquad \frac{y \in]-r, r[}{|y| < r}$ $\qquad |y| < r \Leftrightarrow |x-1| < r$ $\qquad r = 1, \, a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad |x-1| < 1$ $\qquad -1 < x-1 < 1$ $\qquad 0 < x < 2$

$\sum \frac{(x-1)^n}{n}$ converge absolutamente para $x \in]0,2[$
a série diverge no ext$(]0,2[)$

$x=0$ $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ nada se conclui (tomo do módulo) → usar critério de Leibnitz
série converge simplesmente

$x=2$ $\sum \frac{1}{n}$ série divergente
série de Dirichlet divergente

Critério de Leibnitz → para séries alternadas

$a_n \geq 0$, a_n é decrescente

$\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$ série convergente $\Leftrightarrow a_n \to 0$

ex:

1. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ série convergente, mas a sua convergência é simples
2. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolutamente $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum \frac{1}{n^2}$ série de Dirichlet convergente

Domínio de convergência: $[0,2[$
$x=0$ convergência simples

Generalização

Séries de potências de $x-a$

$\sum_{n=0} a_n (x-a)^n$ $\quad r =]a-r, a+r[$ interior convergente

$|x-a| < r$

a série $\sum a_n(x-a)^n$ converge absolutamente para $x \in]a-r, a+r[$
diverge no ext$(]a-r, a+r[)$

ex:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{8^n}}_{=a_n} (1-x)^{3n} = \sum a_n((1-x)^3)^n$$

$y = (1-x)^3$

$r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 8$

$|y| < 8$
$|(1-x)^3| = |x-1|^3 < 2^3$
$|x-1| < 2$
$-2 < x-1 < 2$
$-1 < x < 3$

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = b_n$

$\lim \left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| =$

$|2-2| < 1$

$x=3$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(-1)^n}{8^n} 2^{3n} = \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ conv. simples

$x=-1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ div.