Definição

d' diz-se uma decomposição mais fina que d se $d \subset d'$

$s(f,d') \geq s(f,d)$; $S(f,d') \leq S(f,d)$

$d \in D(I)$

$m(b-a) \leq s(f,d) \leq S(f,d) \leq M(b-a)$

$M = \sup_I f$ $\qquad$ $m = \inf_I f$

$d_1, d_2 \in D(I)$

$s(f,d_1) \leq S(f,d_2)$

$d' = d_1 \cup d_2$, d' é mais fina que d_1 e d_2

$s(f,d) \leq s(f,d') \leq S(f,d') \leq S(f,d)$

$H = \{S(f,d), d \in D(I)\}$ $\qquad$ $L = \{s(f,d), d \in D(I)\}$

o conjunto H é minorado $\Rightarrow$ existe $\inf_{d \in D} H = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ $\Rightarrow$ existe $\sup_{d \in D} L = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Definição - integral de Riemann

Existe o integral de Riemann para f em I se

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

NOTA: $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Neste caso diz-se que f é integrável à Riemann.

ex:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad d \in D$$

$\boxed{\text{não é integral à Riemann}}$

$f = D_{|[a,b]}$, $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = 1$ $\qquad i = 1, \dots, n$

$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = 0$

$S(f,d) = (b-a)$

$s(f,d) = 0$

$\underline{\int_a^b} f = 0$ e $\overline{\int_a^b} f = b-a$

$\triangleright$ A condição de f ser limitada para a integrabilidade de f, não é condição suficiente (do exemplo anterior)

f limitada $\Leftarrow$ f integral

$\not\Rightarrow$

$S(f,d) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b-a$

arc

Critério de integrabilidade

Seja f limitada em $I=[a,b]$.

f é integrável sse $\forall \varepsilon>0\ \exists d \in D(I)\ S(f,d)-s(f,d)<\varepsilon$

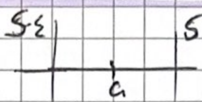
$$\Rightarrow \underbrace{\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx}_{f \text{ é integral à Riemann}}$$

Existe pelo menos 1 racional e 1 irracional em todo o intervalo real.

Disto é aqui ou antes?

Remember

$S = \sup A$



$\forall \varepsilon>0\ \exists a \in A \quad a > S-\varepsilon$

$\ldots \quad i = \inf A \qquad a < i+\varepsilon$

Dado $\varepsilon>0$, existe $d_1 \in D$, $s(f,d_1) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon/2$

existe $d_2 \in D$, $S(f,d_2) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon/2$

$d' = d_1 \cup d_2$

$S(f,d') - s(f,d') < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

f não é integral $\Rightarrow \exists \varepsilon>0\ \forall d \in D(f,d)\ S(f,d)-s(f,d) \geq \varepsilon$

$0 < \varepsilon \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f,d) - s(f,d)$

Corolário

Seja f limitada em I

$d_n \in D(I)$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} (S(f,d)-s(f,d)) = 0$ então f é integrável

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim S(f,d) = \lim s(f,d)$$

ex:

$f(x) = x^2, \quad I=[0,1]$

$d_n = \{1/n, 2/n, \ldots, n-1/n\} \qquad |x_i - x_{i-1}| = 1/n \qquad i=1,\ldots,n$

$S(f,d)-s(f,d) = \sum\limits_{i=1}^{n} ((x_i)^2 - (x_{i-1})^2)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{1/n} \qquad x_i = i/n$

T.P.C.
$\lim (S(f,d) - s(f,d)) = 0$

Do corolário

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim S(f, d_n) = \lim \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \, 1/n = \lim 1/n^3 \left(\sum_{i=1}^{n} (i^2)\right) = \lim \frac{(2n+1)\,n(n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)\,n(n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}}$$

$$\int_0^1 x^2 = \frac{1^3}{3} - 0$$

Problemas

05/12/2022

Ficha capítulo 4

1)

2) $P \sqrt[3]{1-x} = -P - (1-x)^{1/3} = -\frac{(1-x)^{4/3}}{4/3}$

$u' \; u^{1/3}$

5) $P e^{e^x + x} = P \; e^x . e^{e^x} = e^{e^x}$

$u' \; e^u$

$$P\left(\frac{x^4 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}\right) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + P\left(\frac{3x-2}{x^2-2x+1}\right) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1}$$

$$\begin{array}{l|l} x^4 - x + 1 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline -x^4 + 2x^3 - x^2 & x^2 + 2x + 3 \\ 0 \; 2x^3 - x^2 - x + 1 & \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x & \\ 0 \; 3x^2 - 3x + 1 & \\ -3x^2 + 6x - 3 & \\ 0 \; 3x - 2 & \end{array}$$

$$x^4 - x + 1 = x^2 + 2x + 3 + \frac{3x-2}{x^2-2x+1}$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$P\left(\frac{3x-3}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) = 3P\frac{1}{x-1} + P\frac{1}{(x-1)^2} = 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1}$$

35) $P \frac{x^2}{1+x^6} = \frac{1}{3} P \frac{3x^2}{1+(x^3)^2} = \frac{\arctan(x^3)}{3}$

23) $P \frac{\ln x}{x^3} = \frac{x^{-2}}{-2} \ln x - P \frac{x^{-2}}{-2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \frac{x^{-2}}{-2} =$

$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}$

$P 1. \frac{\ln x}{x^3}$, $P \ln x . \frac{1}{x} . \frac{1}{x^2}$, $P \frac{1}{x^3} \ln x$

f' $\quad f' \; g \; f'$ $\quad g'$

$P f'g = fg - P f g'$

44) $P \frac{\ln x + 1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = -\sqrt{1-\ln^2 x} + \arcsen(\ln x)$

$$P f(x) \xrightarrow{x = \varphi(t)} P f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$$
$$t = \varphi^{-1}(x)$$

$\ln x = t \Leftrightarrow x = e^t = \varphi(t)$

$$P \frac{t+1}{\cancel{e^t}\sqrt{1-t^2}} \cancel{e^t} = P \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + P \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{2} \frac{(1-t^2)^{1/2}}{1/2} + \arcsen t$$

$u' \; u^{-1/2}$ $\quad$ arcsen t

$u(t) = 1 - t^2$

$u'(t) = -2t$

5) Determine $y=y(x)$

c) $y' = 2e^{-y}.x$ $\quad y(0)=1$

$y'e^{y} = 2x$

$\begin{cases} P\, y'e^{y} = e^{y} \\ P\, 2x = x^2 \end{cases}$

$\Rightarrow e^{y} = x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}_0^+$

$e^{y(0)} = 0^2 + c \Rightarrow \underline{c = e^1}$

$y(x) = \ln(x^2+e)$ de $\begin{cases} y' = 2e^{-y}x \\ y(0)=1 \end{cases}$

d) $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad y(0)=-1$

$\dfrac{y'}{y^3} = \dfrac{2x(1+x^2)^{-1/2}}{2}$ $\qquad -\dfrac{1}{y^2} = \sqrt{x^2+1}$ $\qquad -\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{(1+x^2)^{1/2}}{2 \cdot 1/2}$

Matéria para o teste nº2
Termina no capítulo 4 (Primitivação)
Começa: Teorema de Rolle

06/12/2022

Critério de integrabilidade

f limitada em $I=[a,b]$ ($a,b \in \mathbb{R}$ e $a<b$)
f é integrável à Riemann sse para todo $\varepsilon>0$, existir $d \in D(I)$

$$S(f,d) - s(f,d) < \varepsilon$$

Teorema

Seja f monótona e limitada em I então a função é integrável

Esboço da demonstração:
1) $f(a)=f(b)$ e f é monótona $\Rightarrow$ f é constante em I $\Rightarrow$ logo f é integrável
2) $f(a) \neq f(b)$ sse $f(a)<f(b)$, f é monótona crescente (análogo para $f(a)>f(b)$)

Vamos verificar que f satisfaz o critério de integrabilidade dado $\varepsilon>0$ ($\rightarrow$ nº dado qq), seja $d \in D([a,b])$ uma decomposição de I em n subintervalos iguais $[x_{i-1}, x_i]$ $i=1,\dots,n$

$M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_i)$ $\quad$ f é monótona crescente $\quad$ $m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_{i-1})$

$$S(f,d) - s(f,d) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1})$$

$<$

$x_i - x_{i-1} < \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ $\qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} =$

by Staples

$$\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot (f(x_n)-f(x_0)) \leq \varepsilon$$
$\hookrightarrow (f(b)-f(a))$

Teorema

f é contínua em $[a,b] \Rightarrow f$ é integrável em $[a,b]$

Observação

As funções seccionalmente contínuas são integráveis.
(monótonas e limitadas)

Questão:

Se f contínua em $]a,b[$ a função f é integrável?

Falsa, basta considerar $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in]0,1[$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\Rightarrow f$ ñ é limitada $\Rightarrow f$ ñ é integrável

Propriedades das funções integráveis

i) f,g integráveis em $I=[a,b]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ então $\alpha f+\beta g$ é integrável em I

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

ii) f integrável em I, $f\geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

f integrável $\Rightarrow f$ é limitada $\Rightarrow$ existe $\sup f$ e $\inf f$ e $\int_a^b f(x)\,dx \geq \inf(f)\cdot(b-a)\geq 0$

iii) f,g integráveis em I, $f(x)\leq g(x)$ $\forall x\in I \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

iv) seja $J\subset I$ um subintervalo de I, se f é integrável em I
$\Rightarrow f$ é integrável em J e para $c\in]a,b[$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Convenção:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

se $b=a$ $\quad \int_a^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx$

$$\underset{c>a}{\Rightarrow} \boxed{\int_c^a f(x)\,dx = -\int_a^c f(x)\,dx}$$

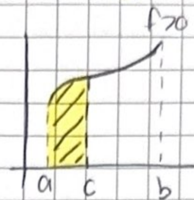
v) f é integrável em $I \Rightarrow |f|$ é integrável em I

$$-|f|\leq f\leq |f| \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

O integral indefinido

Seja f integrável em $I=[a,b]$ então definimos a função $F: I \to \mathbb{R}$

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\ x\in[a,b]$$



$$F(c)=\int_a^c f(t)\,dt$$

$$F(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$$

Teorema fundamental do cálculo

f é integrável em I

i) $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\ x\in I$

F é uma função contínua em I

ii) Se f for contínua em c $\Rightarrow$ F é diferenciável em c e $F'(c)=f(c)$

ex:

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

$f(t)=e^{-t^2}$ contínua em $\mathbb{R}$ logo F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $F'(x)=f(x), x\in\mathbb{R}$

F é uma primitiva de f

Corolário

Toda a função contínua é primitivável.

f é contínua em $[a,b]$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ é uma primitiva de f

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\,dt+\underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0}=\int_a^b f(t)\,dt$$

Fórmula de Barrow

F uma primitiva de $f\in C(I)$

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

F contínua em $c \in I$, $F(x) = \int_a^b f(t)\,dt$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in V_\delta(c)\ |F(x) - F(c)| < \varepsilon$

$x > c$ $$|F(x) - F(c)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt\right| = \left|\int_c^x f(t)\,dt\right| \leq \int_c^x |f(t)|\,dt \leq M \cdot \underbrace{|x - c|}_{<\delta}$$

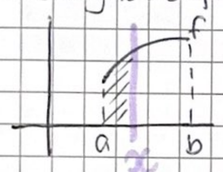
Tomando: $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ f é limitada $|f(x)| \leq M$

Integral de Rieman e o integral indefinido

09/12/2022

f integrável em $I = [a,b]$, define-se $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x \in I$ ($a \in I$)

1) F é designado por integral indefinido e F é uma função contínua em I



Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f uma função contínua em $c \in I$ então F é uma função diferenciável em c e $F'(c) = f(c)$

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Demonstração (esboço)

$$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)\ ? \qquad \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) = 0\ ?$$

Sabemos que $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in V_\delta(c)\ |f(x) - f(c)| < \varepsilon$ (f é contínua em c) seja $h = |x - c| < \delta$.

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) = \frac{\int_a^{c+h} f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx}{h} - f(c) = \frac{\int_a^{c+h} f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx}{h} - f(c) =$$

$$= \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)\,dx = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} (f(x) - f(c))\,dx$$

$$\Rightarrow \left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} (f(x) - f(c))\,dx\right| \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} |f(x) - f(c)|\,dx <$$

$$< \frac{1}{h}\int_c^{c+h} \varepsilon\,dx = \frac{1}{h}(c + h - c)\varepsilon = \varepsilon$$

dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ $h < \delta$ $\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| < \varepsilon$

Corolário

Toda a função contínua em $[a,b]=I$ é primitivável

$F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$ é uma primitiva de f em I uma vez que do T.F.C., $f\in C(I)$

$c\in I$

F é diferenciável e $F'(x)=\left(\int_c^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x)$ $\quad x\in I$

Corolário

$$F(b)-F(a)=\int_c^b f(t)\,dt-\int_c^a f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$$

Fórmula de Barrow

$f\in C(I)$, $I=[a,b]$

Sendo F é uma primitiva de f em I então $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$

ex:

1) $\int_0^1 \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{\arctan \frac12}{2} - \frac{\arctan 0}{2} = \frac{\arctan \frac12}{2}$

$P\frac{1}{4+x^2} = \frac{\arctan(\frac{x}{2})}{2}$ $\qquad 2.\frac{1}{4}\, D\, \frac{\frac12}{1+(\frac{x}{2})^2}$

2) $\int_1^e x^2\ln x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac13\right)\right]_1^e = \frac{e^3}{3}\left(1-\frac13\right) - \left(\frac13\left(0-\frac13\right)\right) = \frac{2e^3}{9}+\frac19=\frac19$

$P\,\underset{f'}{x^2}\,\underset{g}{\ln x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \underbrace{P\frac{x^3}{3}\cdot\frac1x}_{\frac13 Px^2 = \frac{x^3}{9}} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac13\right)$

$f = Px^2 = x^3/3$

Integráveis por partes

$f'g$, $f.g'$ são integráveis em $[a,b]$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f(x).g'(x)\,dx$$

ex:

$\int_1^e \ln(x)\,dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1.\,dx = e-(e-1)=1$

Integração por substituição

φ' contínua, f contínua

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

$\varphi : [c,d] \to [a,b]$
$\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$

ex:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{(1+\ln^2 x)x}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)e^t} \cdot e^t\,dt = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt \underset{\text{Barrow}}{=} \left[\ln\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 =$$

$$= \ln\sqrt{2} - \ln\sqrt{1} = \ln\sqrt{2}$$

$\ln x = t \to x = e^t = \varphi(t)$, $\varphi'(t) = e^t$

$x = 1$, $\ln 1 = t \Rightarrow t = 0$
$x = e$, $\ln e = t \Rightarrow t = 1$

O teorema fundamental do cálculo permite-nos de forma imediata encontrarmos expressões para a derivada deste tipo de funções.

exercício:

1) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t)^3\,dt}{x^4} = \frac{\int_0^0 (\cdot)}{0} = 0/0$ ind.

Usando a regra de Cauchy, pois como a função $\operatorname{sen}(t^3)$ é contínua então $\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)\,dt$ é diferenciável do TFC e $\left(\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)\,dt\right)' = \operatorname{sen}(x^3)$

Como $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)\,dt\right)'}{(x^4)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{4x^3} = \frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\,dt}{x^4} = \frac{1}{4}$$

2) Determine a derivada de $\displaystyle\int_0^{x^2} e^{-(x+t^2)}\,dt$ T.P.C

13/12/2022

Revisões

Polinómio de Taylor

$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ em potências de $x - a$

$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{(n+1)!}$,

$P_n(a) = f(a)$ $\quad P_n'(a) = f'(a)$ $\quad \ldots \quad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$

arc

Lagrange

$R_n(x) = f^{(n+1)}(c) \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ c entre a e x

$\dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0$

em potências de base x, n=2

$f(x) = \ln(1+x) \quad x \in [0, 1/2]$

$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)x^2}{2!} = x - \dfrac{x^2}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \qquad f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} \qquad f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$

$R_2(x) = f'''(c) \dfrac{x^3}{3!} = \dfrac{2}{(1+c)^3} \cdot \dfrac{x^3}{6}$ c entre 0 e x $x \in [0, 1/2]$

$f(x) - P_2(x) = R_2(x)$

$|R_2(x)| < 2 \cdot 1 \dfrac{(1/2)^3}{6} = \dfrac{1}{24}$ $\quad 1+c > 1 \quad \dfrac{1}{1+c} < 1 \quad x \leq \dfrac{1}{2}$

Problemas

15/12/2022

Fórmula de Barrow

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Integração por partes

$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \dfrac{g(x)}{dx}$

Integração por substituição

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$

$x = \varphi(t) \quad \varphi: [c,d] \to [a,b]$

φ contínua $\varphi(c) = a \quad \varphi(d) = b$

$P \dfrac{u'}{u} = \ln|u|$

$P\, u' u^p = \dfrac{u^{p+1}}{p+1}, \; p \neq -1$

$P \dfrac{u'}{1+u^2} = \arctan(u)$

$P\, u' e^u = e^u$

6) c) $\displaystyle\int_{1/2}^{3/2} \frac{1}{\sqrt{x}(1+4x)}\,dx \overset{x=\varphi(t)}{=} \int_{\sqrt{1/2}}^{\sqrt{3/2}} \frac{1}{\cancel{t}(1+4t^2)} \cdot 2\cancel{t}\,dt \overset{\text{Barrow}}{=} [\arctan(2t)]_{\sqrt{1/2}}^{\sqrt{3/2}} = *$

$P \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+4x)}$ $\qquad \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 = \varphi(t), \; \varphi'(t) = 2t$

$x = 1/2 \Rightarrow t = \sqrt{1/2}$

$x = 3/2 \Rightarrow t = \sqrt{3/2}$

$P \dfrac{2}{1+4t^2} = \arctan(2t) \qquad (\arctan(2t))' = \dfrac{2}{1+(2t)^2}$

$* = \arctan(2\sqrt{3/2}) - \arctan(2\sqrt{1/2})$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{e^x}\,dx = [x(-e^{-x})]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} (-e^{-x}) \cdot 1\,dx = 0 - (1 \cdot (-e^1)) - [e^{-x}]_{-1}^{0} =$

$= e - (e^0 - e) = 2e - 1$

$P f'g = fg - Pfg' \qquad P x e^{-x} = x(-e^{-x}) - P(-e^{-x}) \cdot 1 = -xe^{-x} - e^{-x}$

$g = x \quad f' = e^{-x}$

$f = Pe^{-x} = -e^{-x}$

g) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln(x)+1}{2x\sqrt{1-\ln^2(x)}}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{t+1}{\cancel{e^t}\sqrt{1-t^2}} \cancel{e^t}\,dt \overset{\text{Barrow}}{=} \left[-\sqrt{1-t^2} + \arcsen t\right]_0^{1/2} = \left(-\sqrt{3/4} + 1 + \frac{\pi}{6}\right)$

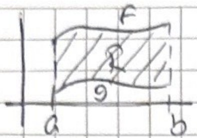
$\ln x = t \Rightarrow x = e^t = \varphi(t), \quad \varphi'(t) = e^t$

$x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0 \qquad x = \sqrt{e} \Rightarrow t = \ln\sqrt{e} = 1/2$

$P \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsen t, \quad \dfrac{1}{-2} P \dfrac{-2t}{\sqrt{1-t^2}} = -\dfrac{1}{2} \dfrac{(1-t^2)^{1/2}}{1/2} = -\sqrt{1-t^2}$

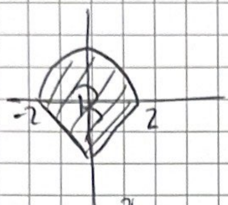
$P\, u' u^{1/2}$

$u = 1 - t^2 \quad u' = -2t$



área $R = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

$\underbrace{y = 4 - x^2}_{f}$, $\underbrace{y = |x| - 2}_{g}$



área $R = 2\int_0^2 (4-x^2)-(x-2)dx$ = T.P.C

TFC: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, f contínua

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$

Determine a derivada de $\left(\int_0^x x\,e^{-t^2}dt\right)' = \left(x.\int_0^x e^{-t^2}dt\right)' =$

$= \int_0^x e^{-t^2}dt + x.\,e^{-x^2}$

$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x - 0$

sucessões e séries

16/12/2022

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{N} \to f(n)$
$u_n := f(n)$
sucessão u_n, $\forall n \in \mathbb{N}$

ex:

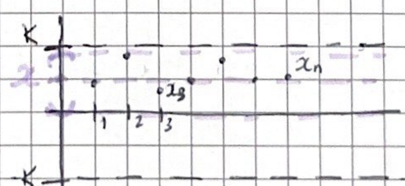
1) $u_n = \sqrt{n}\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, $n \in \mathbb{N}$

2) por recorrência: v_n $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} v_1 = 1/2 \\ v_{n+1} = (v_n)^2 \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Sucessões limitadas

x_n é uma sucessão limitada

$\exists k > 0, -k \leq x_n \leq k, \forall n$



Sucessões monótonas

$x_{n+1} - x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (x_n é monótona crescente)

$\Rightarrow x_n \geq x_1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

decrescente $\Leftrightarrow x_{n+1} - x_n \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \leq x_1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Sucessões convergentes em $\mathbb{R}$

são limitadas

$\lim x_n = x \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} \ \forall n > p \ \underbrace{|x_n - x| < \varepsilon}_{x_n \in V_\varepsilon(x),\ n > p}$

ex:

$x_n = \frac{1}{n} \to 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \ \forall n > p \ \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{100} > 0 \quad \dots \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\boxed{p > \frac{1}{\varepsilon}}$

Exemplo de uma sucessão convergente e não monótona

$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ não monótona

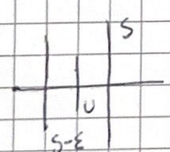
$\underbrace{x_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1}{2n}, \quad x_{2n+1} = -\frac{1}{2n+1}}_{\text{subsucessões monótonas}}$

Teorema

Toda a sucessão x_n monótona e limitada é convergente.

Demonstração:

$U = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, \dots\}$, $\emptyset \neq U$, é limitado, vamos supor que x_n é crescente. Vamos provar que x_n é convergente e $\lim x_n = s = \sup U$



continuação da caracterização do supremo de U ($s = \sup U$)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_p, \ x_p > s - \varepsilon$

por outro lado x_n é crescente

$x_n \geq x_p, \ n \geq p \Rightarrow x_n \geq x_p > s - \varepsilon \Rightarrow x_n \in \underbrace{V_\varepsilon(s)}_{]s-\varepsilon,\, s+\varepsilon[}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \ \forall n > p \ |x_n - s| < \varepsilon$

$x_n \to s$

ex:
$x_1 = 1/2$
$x_{n+1} = x_n^2, n \in \mathbb{N}$
$x_{n+1} - x_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

T.P.C.
Por indução matemática

Conclusão: se x_n é decrescente então x_n é majorada por $1/2$ e minorada por $0 \Rightarrow x_n \rightarrow$

Supondo $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$
$x = x^2$
$x^2 - x = 0$
$x(x-1) = 0$
$x = 0 \vee \cancel{x = 1}$

T.P.C.
$(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2 = 1$

ex:
$u_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), n \in \mathbb{N}$

$0 < \frac{\sqrt{n}(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} < 1$ → é crescente

$\sqrt{\frac{n+1}{n}} > 0$ é decrescente

$u_n \rightarrow 1/2$

ex: álgebra de limites

• $u_n = \frac{n^2+n+1}{n^3+1} = \frac{\frac{1}{n} + 1/n^2 + 1/n^3}{1 + 1/n^3}$

$1/n^p \rightarrow 0 \quad p \in \mathbb{N}$

$u_n \rightarrow \frac{0+0+0}{1+0} = 0$

• $v_n = \frac{2^{n+1}}{3^n + 2^n} = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \rightarrow \frac{0}{1+0} = 0$

$0 < a < 1$
$a^n \rightarrow 0$

teorema sucessões enquadradas
$x_n \leq y_n \leq z_n$
$x_n, z_n \rightarrow x$
$\Rightarrow y_n \rightarrow x$

$(1+nx)^n \geq 1+nx$

• $w_n = \frac{3^n + n^{50}}{n^{100} + 3^{n+1}}$

$\frac{n^{100}}{3^n} \rightarrow 0$

Teorema

Seja $u_n > 0$ e $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{1\}$ então se $\ell < 1$ tem-se $u_n \rightarrow 0$

• $\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \; \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| < \varepsilon$ sabendo $\ell < 1$, seja ε tal que $\ell + \varepsilon < 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \; \forall n > p$

$u_{n+1} < u_n \Rightarrow u_n$ é decrescente, u_n é majorada e 0 é minorante $\Rightarrow u_n$ é convergente

arc

Falta provar que $u_n \to \infty$ mas se $u_n \to u \neq 0$ então $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u}{u} = 1$
impossível $\ell \neq 1$

Escala de sucessões

$n^a << b^n << n! << n^n$

$a>0, b>1$

$\frac{n^a}{b^n} \to 0, \quad \frac{n!}{n^n} \to 0$

$u_n, v_n > 0, \quad u_n << v_n \Leftrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 0$

- $n^a << b^n \quad , a>0, b>1$

$u_n = \frac{n^a}{b^n}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^a}{b^{n+1}}}{\frac{n^a}{b^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^a \cdot \frac{\cancel{b^n}}{b \cdot \cancel{b^n}} = \frac{(1+1/n)^a}{b} \to \frac{1}{b} = \ell < 1$

$\Rightarrow \frac{n^a}{b^n} \to 0$

T.P.C.
$\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

séries numéricas

20/11/2022

Seja uma sucessão de reais, $a_n, n \in \mathbb{N}$

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \rightarrow$ série numérica

Definição

Diz-se que a série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ é uma série convergente sse $\lim S_n = S \in \mathbb{R}$.

$R \neq 1$

$$S_n = \underbrace{1 + R + R^2 + \ldots + R^n}_{\sum_{k=0}^{n} R^k} = \frac{1-R}{1-R} \sum_{k=0}^{n} R^k = \frac{1-R^{n+1}}{1-R}$$

$S_n = \frac{1-R^{n+1}}{1-R} \qquad |R| < 1 \qquad \lim S_n = \frac{1-\lim R^{n+1}}{1-R} = \frac{1-0}{1-R}$

S_n designamos por sucessão das somas parciais da série

séries geométricas

$\sum_{k=0}^{+\infty} R^k$ são séries convergentes sse $|R| < 1$ e neste caso a soma da série, S,

$(S = \lim S_n \in \mathbb{R}) \qquad S = \frac{1}{1-R}$

by Staples

Podemos generalisar:

$$\tilde{S}_n = R^p + R^{p+1} + \dots + R^n = R^p(1+R+\dots+R^{n-p}) = R^p\left(\frac{1-R^{n+1-p}}{1-R}\right), n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x\to+\infty} R^{n+1-p} = 0 \qquad |R|<1 \qquad \lim \tilde{S}_n = \frac{R^p}{1-R} = \sum_{k=p}^{+\infty} R^k$$

A natureza da série não é alterada!

Propriedades

Sendo $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ séries convergentes

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha a_n + \beta b_n)$ é uma série convergente

ex:

1) Estude a natureza da série $\sum_{n=2}^{+\infty} 2^{-2n}$ e no caso da série ser convergente indique o valor da soma da série.

2) O mesmo enunciado para a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}+(-1)^n}{3^{n+1}.5}$

Resolução:

1) $R = \frac{1}{4}$ $\quad \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $R = \frac{1}{4}$, $|R|<1$

logo é uma série convergente e o valor da soma

$$S = \frac{1}{1-1/4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}.5} = \frac{1}{5.3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}.5} = \frac{1}{5.3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ são séries geométricas convergentes de razão $R = -\frac{1}{3}$ ($R = \frac{2}{3}$) e $|R|<1$

Como a adição de séries convergentes é uma série convergente então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(-1)^n}{3^{n+1}.5} = \frac{1}{15}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{15}\left(2-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{15}\cdot\frac{7}{4}$$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ não é uma série geométrica

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

$S_n \geq \sqrt{n}$, como $\sqrt{n} \to +\infty$ a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente

Condição necessária para a convergência de séries (CNC)

a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ é convergente $\Rightarrow a_n \to 0$

(ver exemplo anterior)

Aplicação:

se $a_n \not\to 0 \Rightarrow$ a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ é uma série divergente

Dem:

$\underbrace{S_n}_{a_1 + \dots + a_n} \to S \in \mathbb{R}$, $S_n - S_{n-1} = a_n \quad n \in \mathbb{N}$

$\lim(S_n - S_{n-1}) = \lim a_n \Rightarrow \lim a_n = S - S = 0$

Ex:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$ série divergente pois $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{(n+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e} \neq 0$

(a condição CNC não é satisfeita)

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{n n! + 2^n}{(n+1)! + 3^n}}_{= a_n}$ $\qquad \lim a_n = 1 \neq 0$ a série diverge

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{(n+1)n}}_{a_n}$ $\qquad a_n = \frac{1}{(n+1)n} \to 0 \Rightarrow$ nada se conclui quanto à natureza da série

em $\mathbb{R}$ $\quad \frac{1}{(x+1)x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \underbrace{\left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right)}_{k=1} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right)}_{k=2} + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim S_n = \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

séries de Mengoli

a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n+1})$ é convergente sse $\lim u_n \in \mathbb{R}$

Ex:

1) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Séries de termos não negativos, $a_n \geq 0$

$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$, S_n é uma sucessão crescente $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$ para S_n ser convergente S_n tem que ser majorada

Critério geral de comparação

$a_n, b_n > 0$ e $a_n \leq b_n$ $(n > p)$

1) se $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ é uma série convergente $\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ é uma série convergente

2) se $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ é uma série divergente $\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ é uma série divergente

T.P.C. $\sum \frac{1}{n+2^n}$

Ex:

Estude a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$, $\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

22/12/2022

Problemas

Sucessões reais

1) Determinar limites

- Enquadramento

$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \forall n > p \qquad (\lim x_n = x) \; x_n \to x ; \; z_n \to x$

$\Rightarrow y_n \to x \in \mathbb{R}$

ex:

- $u_n = \frac{sen^2(n)}{n}$ $\qquad u_n$ é convergente?

$\frac{0}{n} \leq \frac{sen^2(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow u_n \to 0 \qquad$ uma vez que $\frac{1}{n} \to 0$

- $u_n = \left(sen \frac{1}{n}\right)^{1/n} \qquad (0^0 \text{ ind}) \quad sen \frac{1}{n} \to 0 \quad \frac{1}{n} \to 0$

$x_n^{y_n} \to x^y$

$\underset{>0}{x_n} \to x, \; y_n \to y$

! em $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} \left(sen \frac{1}{x}\right)^{1/x} = 0^0 \text{ ind} \qquad \left(sen \frac{1}{x}\right)^{1/x} = e^{\ln\left((sen \frac{1}{x})^{1/x}\right)} = e^{\frac{1}{x} \ln(sen 1/x)}$

$\lim_{x \to +\infty} \left(sen \frac{1}{x}\right)^{1/x} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(sen 1/x)}{x}} = e^0 = 1$

Regra de Cauchy

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(sen 1/x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ ind}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(sen \frac{1}{x}))'}{x'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{(sen 1/x)'}{sen 1/x}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x}}{sen 1/x} = \lim_{y \to 0^+} \frac{-y^2 \cos y}{sen y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{y}{sen y} \cdot$

$\cdot \left(\lim_{y \to 0^+} y \cos y\right) = 1 \cdot 0 = 0$

Como $\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = 1 \Rightarrow \lim f(n) = 1$

restrição

$\lim \underbrace{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{1/n}}_{f(n)} \to 1$

• $x_n: \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{3}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$x_2 = \frac{(3/2)^2+2}{3} = \frac{17}{12} < \frac{18}{12} = x_1$

$x_{n+1} - x_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

por indução:

1) $n=1 \quad x_2 - x_1 = -\frac{1}{12} < 0$ p.v.

2) fixado n $\quad \underbrace{x_{n+1} - x_n \leq 0}_{H.I} \Rightarrow \underbrace{x_{n+2} - x_{n+1} \leq 0}_{Tese}$

Dem:

$x_{n+2} - x_{n+1} \stackrel{\text{def } x_n}{=} \frac{x_{n+1}^2+2}{3} - \frac{x_n^2+2}{3} = \frac{1}{3}(x_{n+1}^2 - x_n^2) = \frac{1}{3}\underbrace{(x_{n+1} - x_n)}_{\leq 0 \text{ H.I}}\underbrace{(x_{n+1} - x_n)}_{>0}$

$\Rightarrow x_{n+2} - x_{n+1} \leq 0 \Rightarrow x_n$ é decrescente

$\Rightarrow x_n \leq x_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

por outro lado $x_n > 0$

$0 < x_n \leq x_1 = \frac{3}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad$ x_n é limitada e monótona logo x_n é convergente

Concluimos que $\lim x_n = x \in \mathbb{R}$

determinar x:

$\lim \frac{x_n^2+2}{3} = \frac{(\lim x_n)^2+2}{3} = \frac{x^2+2}{3}$

$\lim x_{n+1} = \lim x_n = x$

da def. de $x_n \Rightarrow x = \frac{x^2+2}{3} \Rightarrow x^2+2-3x = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee \cancel{x=2}$ $\quad x_n \leq \frac{3}{2}$

com passagem ao limite $\lim x_n = x$ é único!

Toda a subsucessão de uma sucessão convergente é também convergente

$y_n = (-1)^n$ não é convergente

$y_{2n} = 1 \quad y_{2n+1} = -1 \quad \lim y_{2n} \neq \lim y_{2n+1}$

Ainda dentro de classe $x_n^{y_n}$, $x_n \to x$, $y_n \to y$

- Determinar o limite, caso exista em $\mathbb{R}$, de $\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$

Sabemos que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ generalizar $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$

$$\left(\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\right)^{1/n} = \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2} \to e^0 = 1$$

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3} \to e \qquad y_n = 1/n \to 0$$

→ Utilizando a algebra de limites e alguns limites conhecidos, ex. $\frac{1}{n} \to 0$ $\left(\frac{1}{n^p} \underset{p>0}{\to} 0\right)$ e $0<c<1 \Rightarrow c^n \to 0$

Determinar o valor dos limites seguintes caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$.

1) $\frac{(100)(n+100)^2}{n^3+1}$ 2) $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^3}+1}$ $\frac{n^{2/3}}{n^{3/2}}$ 3) $\frac{n^{100}}{n+2^n}$

$$(100)\left(n\left(1+\frac{100}{n}\right)\right)^2 = \frac{100\,n^2\left(1+\frac{100}{n}\right)^2}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{100}{n}\cdot\frac{\left(1+\frac{100}{n}\right)^2}{1+\frac{1}{n^3}} \to 0\,\frac{(1+0)^2}{1+0} = 0$$

$n^a \ll b^n \ll n! \ll n^n$
$a>0,\ b>1$

3) $n^{100} \ll 2^n \Rightarrow \lim \frac{n^{100}}{2^n} = 0$

$\frac{n\,n! + 2^n}{(n+1)! + 3^n}$ ver em casa que converge para 1
usar escala de sucessões

séries de termos positivos

(ñ negativos) 03/01/2023

ex:

$a_n \geq 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Sucessão de somas parciais

$S_n = a_1 + \ldots + a_n$, como $a_n \geq 0$, $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

S_n é crescente

Teorema.

$a_n \geq 0$, S_n é convergente em $\mathbb{R}$ sse S_n é majorado (a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente), $s = \lim S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Critério geral de comparação

Sejam $a_n, b_n \geq 0$ e $a_n \leq b_n$ $(\forall n > p)$

i) Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ é uma série convergente $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é uma série convergente

arc

ii) Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ série divergente $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ é uma série divergente.

Ideia sobre a demonstração

$a_n \le b_n \Rightarrow \underbrace{a_1+\dots+a_n}_{S_n} \le \underbrace{b_1+b_2+\dots+b_n}_{S'_n}$

Como $S_n \le S'_n$ sendo S'_n é convergente
$\Rightarrow S'_n$ é majorada
$\Rightarrow S_n$ é majorada, S_n é convergente, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é convergente

Ex:

1) Analise a natureza da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+2^n}$

Res: $a_n = \frac{1}{1+2^n} \rightarrow \frac{1}{1+\infty} = 0$, nada se conclui quanto à natureza da série

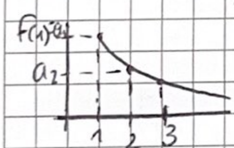
$\frac{1}{1+2^n} < \frac{1}{2^n} = b_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ série geométrica convergente pois a razão $r=\frac{1}{2}$ e $|r|<1$

Conclusão: sendo $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ convergente do critério geral da comparação a série $\sum a_n$ é convergente

Critério integral

Seja f uma função contínua, positiva e decrescente em $[1,+\infty[$ tal que $a_n = f(n), n\in\mathbb{N}$

- Se existir $\lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)\,dx$, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é convergente (1)
- Se não existir $\lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)\,dx$, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é divergente



$S_n = a_1+\dots+a_n$

$f(x)\ x\in[1,2]$ $\quad a_2 < f(x) < a_1 \quad a_2 < \int_1^2 f(x)\,dx < a_1$

$a_2 < \int_1^2 f(x)\,dx$

$a_3 < \int_2^3 f(x)\,dx$

...

somando $\underbrace{a_2+a_3+\dots+a_n}_{S_n-a_1} < \int_1^n f(x)\,dx$ (1)

Séries de Dirichlet

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ $\quad \alpha=1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ série harmónica

$f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in[1,+\infty[$ $\quad P\frac{1}{x} = \ln x$, $\lim_{x\to+\infty}[\ln(x)]_1^n = \lim_{n\to+\infty}(\ln(n)-\ln(1)) =$

$= \lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty \Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ é uma série divergente

$\underline{\alpha \neq 1}$ $\quad \alpha \leq 0 \quad \frac{1}{n^\alpha} \not\to 0 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$ são séries divergentes

$\alpha > 0 \quad f(x) = x^{-\alpha}$, $x \in [1, +\infty[$ $\quad \int_1^n x^{-\alpha}\, dx \overset{\text{Barrow}}{=} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n = \frac{n^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} =$

$$= \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ são séries convergentes} \\ +\infty, & 0 < \alpha < 1 \Rightarrow \sum_{0<\alpha<1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ séries divergentes} \end{cases}$$

Conclusão: Séries Dirichlet

T.P.C. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ séries convergentes $\alpha > 1$
séries divergentes $\alpha \leq 1$

Critério de comparação (limite)

Sejam $a_n, b_n > 0$, e $\lim \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}^+$ então as séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ são da mesma natureza.

Ex:

Verifique a natureza das seguintes séries

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n^2+1}}$ $\quad$ 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}(2^{-n})$ $\quad$ 3) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^3-1}$

1) $\underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n^2+1}}}_{a_n} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n^2}}_{b_n} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to 0$ $\quad b_n = \frac{1}{n^{2-\frac{1}{2}}}$ $\quad \sum b_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ série de Dirichlet convergente

C.C. $\Rightarrow \sum a_n$ é série convergente

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to 1 \in \mathbb{R}^+$ condição do C.C.

2) $\operatorname{sen}(2^{-n}) \to \operatorname{sen} 0 = 0$
em $\mathbb{R}$ $\quad \frac{\operatorname{sen} x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \quad x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$

$\frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} \to 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} 2^{-n}}{2^{-n}} \to 1 \quad b_n = 2^{-n}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}$, $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ logo do C.C.

as séries $\sum a_n, \sum b_n$ são ambas convergentes

Séries

05/01/2023

sucessão das somas parciais

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ série convergente $\left(S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} S \in \mathbb{R}\right)$

- Séries de Mengoli
- Séries geométricas

$\sum_{n=p}^{+\infty} r^n$ séries geométricas convergentes $\Leftrightarrow |r|<1$ $(r^n \to 0 \Leftrightarrow |r|<1)$

$\boxed{p \geq 0 \quad S = \frac{r^p}{1-r}, \quad |r|<1 \quad \text{(soma série S)}}$

ex:

Verifique a natureza das séries e no caso de convergência indique se possível o valor da soma da série (S).

1) $\sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-n+1}$ 2) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^{n-1}+(-1)^n}{2^{2n+1}}$

res:

1) $\sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-n+1} =$ $a_n = 2^{-n+1} \to 2^{-\infty+1} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = 0$ a CNC é satisfeita nada se conclui quanto à natureza da série

$= \sum_{n=2}^{+\infty} 2^{-n}$

$a_n = 2^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, é uma sucessão geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$, $(|r|<1)$ então a série $\sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-n}$ é uma série geométrica convergente

Condição necessária para convergência (CNC)

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ série convergente $\Rightarrow a_n \to 0$ ($\Leftarrow$ ✗)

aplicação:

$a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$

ou $\sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-n+1} = \sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-n} \cdot 2 = 2\sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-n} = 2\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot \frac{(1/2)^3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = S$

Observação:

$\sum_{n=p}^{+\infty} 2^{-n+1} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{(1/2)^p}{1-1/2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^p = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Leftrightarrow p=6$

$\Rightarrow p = ?$

2) $0 < \frac{3^{n-1}+(-1)^n}{2^{2n+1}} < \frac{3^{n-1}+1}{(2^2)^n \cdot 2} = \frac{3^{-1}(3/4)^n + (1/4)^n}{2}$

$(3/4)^n \to 0, (1/4)^n \to 0 \Rightarrow \frac{3^{-1}(3/4)^n + (1/4)^n}{2} \to 0$

$\Rightarrow \frac{3^{n-1}+(-1)^n}{2^{2n+1}} \to 0$ nada se conclui quanto à natureza da série

by Staples

as séries

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{2n+1}} = \frac{3^{-1}}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad e \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

são ambas séries geométricas convergentes de razão $r_1 = 3/4$ (resp. $r_2 = -1/4$) e $|r_1| < 1$ e $|r_2| < 1$ e a série em 2) é assim uma série convergente (pois resulta da adição de duas séries convergentes)

$$e \; S = S_1 + S_2 = \frac{1}{6} \frac{(3/4)^2}{1 - 3/4} + \frac{1}{2} \frac{(-1/4)^2}{1 + 1/4} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{8} + \frac{1}{40} =$$

$$= \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$$

séries de Mengoli

$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n+1})$ são séries convergentes sse $u_n \to u \in \mathbb{R}$

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n+1}) = u_1 - \lim u_n$$

ex: Estude a natureza da série como série de Mengoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$$

$$1 = (\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2 \qquad \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$u_n = \sqrt{n}$

como $\sqrt{n} \to +\infty$ a série $-\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$ é uma série divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^3}_{a_n} \quad \text{divergente} \quad a_n \not\to 0$$

06/01/2022

$a_n \geq 0$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$

Critério geral de comparação

$a_n, b_n \geq 0$ e $a_n < b_n$ quanto à natureza das séries:

1) $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ série convergente $\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ série convergente

2) $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ série divergente $\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ série divergente

ex:

1) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\frac{2^{-n}}{1 + 2^n}}_{a_n}$ é uma série convergente $\frac{1}{1+2^n} < 1$, pois $1 + 2^n > 1$, $a_n \leq 2^{-n}$

pois $\frac{1}{1+2^n} < 1 \Rightarrow \frac{2^{-n}}{1+2^n} < 2^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (1/2)^n$ série geométrica convergente, do C.G.C. $\Rightarrow \sum a_n$ é uma série convergente

2) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ série de Dirichlet convergente $\underset{\alpha=2\geq 1}{}$ $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha} \begin{array}{l} \text{série conv. } \alpha>1 \\ \text{série dv. } \alpha<1 \end{array}\right)$

$\lim \tan\left(\frac{1}{n^2}\right) = \tan\left(\lim \frac{1}{n^2}\right) = \tan(0) = 0$ inconclusivo

CNC

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ série conv. $\Rightarrow a_n \to 0$

aplicação

$a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ série divergente

caso $a_n \to 0$ nada se conclui quanto à natureza da série

Critério de comparação (limite) C.C.

$a_n, b_n \geq 0$ $\quad \lim \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}^+$ então as séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n, \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ são da mesma natureza

? $\lim\limits_{x_n = 1/n^2} \frac{\tan(1/n^2)}{1/n^2} \overset{(*)}{=} 1$, satisfeita a condição do critério de comparação concluímos que a série $\sum \tan(1/n^2)$ é convergente

(*) em $\mathbb{R}$ $\underset{x\to 0}{}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{1} = 1 \Rightarrow \forall x_n \to 0 \; \frac{\tan(x_n)}{x_n} \to 1$

NOTA

Como explicar a natureza da série seguinte $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{n^n}$

$\frac{n!}{n^n} \to 0$ da escala de sucessão

inconclusivo quanto à natureza da série

Critério da razão

seja $a_n > 0$

1) Se existir $0<r<1$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$ então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é convergente

2) Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ então a série $\sum a_n$ é divergente

ideia da dem: $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} r^n$ série geométrica convergente, $\underset{0<r<1}{}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r = \frac{b_{n+1}}{b_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$ $\quad \frac{a_n}{b_n}$ é decrescente $\quad \frac{a_n}{b_n}$ majorada $\quad \exists K>0 \; a_n \leq K b_n$ do C.C.