$h(x) = x^p \quad p \in \mathbb{N}, \quad h'(x) = p x^{p-1}$ $\qquad \binom{p}{k} = \frac{p!}{(p-k)!\,k!}$

$a \in D_1 \quad h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^p - a^p}{h} =$

pa^{p+1} $\qquad h = x - a$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} \cdot h^k - a^p}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} h^k}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} h^{k-1} = \binom{p}{1} a^{p-1} + 0 =$

$= p\, a^{p-1}$

Extremos locais ou relativos

19/10/2022

Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$, f tem um máximo (mínimo) local em c, se existir $V_\delta(c)$ tal que $f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$), $x \in V_\delta(c)$.

NOTA:
1) Os extremos absolutos também são extremos locais
2) Se não existirem extremos locais não existem extremos absolutos

Condição necessária para a existência de extremos locais

Seja $I = [a,b]$, f é diferenciável em $c \in \text{int}\, I$ e seja $f(c)$ um extremo local de f então $f'(c) = 0$

Demonstração:
f é diferenciável em c, existem $f_d'(c)$, $f_e'(c)$ e
$f_d'(c) = f_e'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

supondo que $f(c)$ é máximo local $f(x) \leq f(c)$

$x < c, \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f_e'(c) \geq 0$

$x > c, \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f_d'(c) \leq 0$

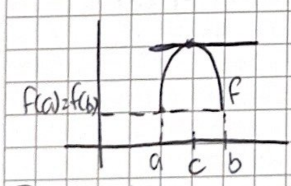
$f_d'(c) = f_e'(c) \Rightarrow f'(c) = 0$

NOTA:
1) A condição $f'(c) = 0$ não é suficiente para que $f(c)$ seja extremo local. exemplo: $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ e $f(0)$ não é extremo local
2) Os valores para os quais $f'(x) = 0$, são designados por pontos críticos
3) Os extremos podem ocorrer em pontos de não diferenciabilidade, nos pontos de fronteira del

Aplicação da condição necessária:

Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se $f'(x) \neq 0$, $x \in I$ então não existem extremos

Teorema de Rolle



Seja $I = [a,b]$ (intervalo fechado e limitado) $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$

f contínua em I e diferenciável em $]a,b[$ se $f(a) = f(b)$ então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$

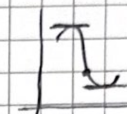
Demonstração:
Do teorema de Weierstrass, existem máximo e mínimo de f, M (resp. m)

1º) $M = m$, f é constante $\Rightarrow f'(x) = 0$ em $]a,b[$

2º) $M > m$

Como $f(a) = f(b)$, nos extremos do intervalo $[a,b]$ só pode ocorrer um dos extremos (M ou m) o outro extremo ocorre no interior de $[a,b]$ existe $c \in]a,b[$, $f(c)$ é um extremo local (interior) como f é diferenciável em $c \Rightarrow f'(c) = 0$

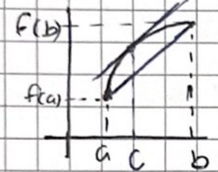
Corolários



1) Entre dois zeros de f existe um zero de f'

2) Entre dois zeros consecutivos de f' existe no máximo um zero de f.

Teorema de Lagrange



Seja $I = [a,b]$ (intervalo fechado e limitado) $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$

f contínua em I e diferenciável em $]a,b[$ então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

Demonstração:

$K = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$, $g(x) = f(x) - Kx$, g contínua em I e diferenciável em $]a,b[$ pois resulta da soma de f contínua em I e diferenciável em $]a,b[$.

$g(a) = g(b) \overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow}$ existe $c \in]a,b[$ $g'(c) = 0$ e, $g'(c) = f'(c) - K = 0$
$f'(c) = K$

Corolários

Seja f, g diferenciável em $]a,b[$ contínua em I

1) $f'(x) = 0$, $x \in]a,b[\Rightarrow f$ é constante

$\forall x_1, x_2 \in I$, usando Lagrange em $[x_1, x_2]$, existe $c \in]x_1, x_2[$, $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

como $f'(c) = 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$ $\forall x_1, x_2 \in I \Rightarrow f$ é constante

2) $f'(x) = g'(x) \underset{x \in]a,b[}{\Rightarrow} f(x) - g(x) = \text{constante}$

3) i) $f'(x) > 0$, $\forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ é estr. crescente em I
ii) $f'(x) < 0$, $\forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ é decrescente em I

Dem:
i) $\forall x_1, x_2$, $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
aplicando Lagrange a f em $[x_1, x_2]$ existe $c \in]x_1, x_2[$, $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$f'(c)>0 \Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>0$

Exercício:

Mostre que $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x)$, $x \in [0,+\infty[$

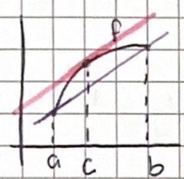
$f(t)=\arctan(t)$, $t \in [0,x]$, $x>0$ | Lagrange existe $c \in]0,x[$ $f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\frac{1}{1+c^2}=\frac{\arctan(x)}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\arctan(x)}{x} \Leftrightarrow$ juntando $x=0$

$c<x$ $\frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+x^2}$ $\Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x)$

Previously in Cálculo 1... 24/10/2022

Teorema de Lagrange



f contínua em $[a,b]$, diferenciável em $]a,b[$ então existe $c \in]a,b[$, $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ex:

Prove que $e^x \geq 1+x$, $x \in \mathbb{R}$

$f(t)=e^t$, $t \in [0,x]$

do teorema de Lagrange existe $c \in]0,x[$ $f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ $x>0$, $0<c<x$

$1<e^c=\frac{e^x-1}{x} \Rightarrow e^x-1>x \Leftrightarrow e^x>1+x \Rightarrow e^x \geq 1+x$, $x \geq 0$

Teorema de Cauchy

f,g contínuas em $[a,b]$, diferenciáveis em $]a,b[$, $g'(x) \neq 0$
($[a,b]$ é um intervalo fechado e limitado, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$)
então existe $c \in]a,b[$, $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

NOTA:
Se $g(x)=x$ obtemos o teorema de Lagrange

Dem:
Seja $h(x)=f(x)-Kg(x)$
supondo $K=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, $g'(x) \neq 0 \Rightarrow g(b) \neq g(a)$

h é contínua em $[a,b]$ (resultante do produto e soma de funções contínuas),
h é diferenciável em $]a,b[$ (pois resulta do produto e soma de funções diferenciáveis)
$\boxed{h(a)=h(b)} \Leftrightarrow f(a)-Kg(a)=f(b)-Kg(b) \Leftrightarrow K(g(b)-g(a))=f(b)-f(a)$
Rolle
$\Rightarrow$ existe $c \in]a,b[$ onde $h'(c)=0 \Leftrightarrow f'(c)-Kg'(c)=0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)}=K=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
$h'(x)=f'(x)-Kg'(x)$

ex:

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad f'(x) = (x^{2/3})' = \frac{2}{3} x^{-1/3}$ $\quad$ f não é diferenciável no ponto 0

$[-1, 1]$

$f(-1) = f(1)$

Regra de Cauchy

f,g diferenciáveis em $]a,b[$

$g'(x) \neq 0$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0 \ (\infty)$

e existe em $\overline{\mathbb{R}}$ $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

o limite pode ser $+\infty$ ou $-\infty$

$$\Bigg\} \quad \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ex:

① $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} 1$

pela regra de Cauchy

$f(x) = \arctan(x)$

$g(x) = x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\arctan(x))'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \frac{1}{1+0} = 1$$

② $\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x \overset{0^0}{=} e^{\lim_{x \to 0^+} x \ln(\operatorname{sen} x)} \overset{0 \infty}{=} e^{\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{x}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} e^0 = 1$

pela regra de Cauchy

$(h_1(x))^{h_2(x)} = e^{h_2(x) \ln(h_1(x))}$, $h_1 > 0$

CA: $\lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln(\operatorname{sen} x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \times \lim_{x \to 0^+} x \cos x = -1 \times 0 = 0$

③ $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 0$

pela regra de Cauchy

$\lim_{x \to 0^+} \frac{(e^{-1/x})'}{x'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x^2 e^{-1/x}}{1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} \ \frac{0}{0}$

a expressão está mais complicada q a inicial

STOP! vamos trocar de indeterminação

$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\frac{1}{x})'}{(e^{1/x})'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-1/x^2}{-1/x^2 e^{1/x}} = 0$

Esboço da demonstração de 1 caso

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ e $g'(x) \neq 0$, f,g diferenciáveis em $]a,b[$

podemos prolongar f e g por continuidade a a e sendo o teorema de Cauchy em $[a,x]$, $x \in]a,b[$, existe $c_x \in]a,x[$ $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$

$$\boxed{\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}} \quad *$$

como existe $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \lim\limits_{c_x \to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = A$

de $*$ tem-se $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

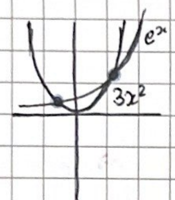
Problemas

26/10/2022

1) Mostre que a equação $3x^2 = e^x$ tem exatamente 3 soluções.

Seja $h(x) = 3x^2 - e^x$, queremos mostrar que h tem exatamente 3 zeros.

1º) Mostrar que existem pelo menos 3 zeros → Bolzano
2º) Simultaneamente mostrar que existem no máximo 3 zeros → Rolle



h é contínua em $\mathbb{R}$, resulta da diferença de 2 funções elementares (logo contínuas)
$\cdot\ 3 > e$, $x = 1$ $h(1) = 3 - e > 0$, $x = -1$ $h(-1) = 3 - e^{-1} > 0$, $h(0) = -1 < 0$
Aplicando em corolário do teorema de Bolzano à função h nos intervalos fechados e limitados $[-1, 0]$ e $[0, 1]$
como $h(-1).h(0) < 0$ e $h(0).h(1) < 0$ então existem
$z_1 \in]-1, 0[$ e $z_2 \in]0, 1[$ tais que $h(z_1) = h(z_2) = 0$

Regra de Cauchy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{e^x} = 0?,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(3x^2)'}{(e^x)'} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(6x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} (3x^2 - e^x) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2}{e^x} - 1\right) e^x = +\infty\,(0-1) = -\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow \forall_{K>0}\ \exists_{L>0}\ \forall_{x>L} \Rightarrow h(x) < -K$

fixado K tal que existe $L > 1$, existe $x_1 > 1$, $h(x_1) < 0$

Assim como $h(1).\ h(x_1) < 0$ e h é contínua em $[1, x_1]$ então existe
$z_3 \in]1, x_1[$, $h(z_3) = 0$.

2º) Vamos provar por absurdo, ou seja, supondo que h tem pelo menos 4 zeros, z_1, z_2, z_3, z_4.
Por aplicação do teorema de Rolle, às funções h, h' e h'' nos respetivos intervalos, obtem-se a existência de um zero da função h''', mas $h'''(x) = -e^x \neq 0$ o que é impossível.

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2 e^{\ln^2(x)}} = \frac{-\infty}{\underbrace{0 \cdot +\infty}_{\text{ind}}}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{e^{-1}.e^{(\ln(x)+1)^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\Rightarrow} e \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{e^{(\ln(x)+1)^2}(\ln(x)+1)'} = e \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cancel{1/x}}{2\,\cancel{1/x}\,(\ln(x)+1)\,e^{(\ln(x)+1)^2}} =$

$x^2 e^{\ln^2(x)} = e^{\ln^2(x) + 2\ln(x)} = e^{(\ln(x)+1)^2} . e^{-1} = e^{\underbrace{\ln^2(x) + 2\ln(x) + 1}_{\text{caso notável}} - 1}$ ↳ separa $\qquad = \frac{e}{\infty} = 0$

Derivadas de ordem superior

26/10/2022

Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$ e seja $D_1 \subset \text{int } D_f$ o conjunto dos pontos de int D_f onde f é diferenciável

$f': D_1 \to \mathbb{R}$
$x \in D_1 \to f'(x)$

$n \in \mathbb{N}$ $\quad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ $\quad x \in D_n$

ex:

① $f(x) = e^x \qquad f^{(n)}(x) = e^x$

② $f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$ $\qquad f'(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$ $\qquad f_e'(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 0}{0} = 0$

$f_d'(0) = 0$

$f''(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$ $\qquad f_d''(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{0}{x} = 0$

$f^{(n)}(x) = 0, x \neq 0$ $\qquad f_e''(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x - 0}{x} = 2$

$\Big\}$ $\tilde{n}$ existe $f''(0)$

Seja I intervalo aberto $f \in C^n(I)$, f é n-vezes diferenciáveis em I e a função $f^{(n)}(x)$ é contínua em I.

$n = 0 \quad f^{(0)} = f$ $\qquad$, $f \in C(I)$ é a classe das funções contínuas em I

$C^1(I)$ é a classe das funções contínuas cuja derivada é também contínua em I

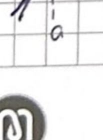
f' diferenciável em $a \in D_f$

$f'(a) = 0, f''(a) > 0 \Rightarrow f(a)$ é máximo local
$f'(a) = 0, f''(a) < 0 \Rightarrow f(a)$ é mínimo local

· f(a) ponto crítico
$f''(a) > 0 \Rightarrow \exists V_\delta(a), x \in V_\delta(a): f''(x) > 0$
$\Rightarrow f'$ em $V_\delta(a)$ é estritamente crescente e $f'(a) = 0$

$\Rightarrow x > a \quad f'(x) > 0, \; x > a \Rightarrow f(x) > f(a)$
$\quad\; x < a \quad f'(x) < 0, \; x < a \Rightarrow f(x) > f(a)$
$\Big\}$ $f(x) > f(a) \;\; \forall x \in V_\delta(a)$
$\Rightarrow f(a)$ mínimo local

f diferenciável em a
$f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a)) = R_1(x)$ é o infinitésimo de ordem superior a 1 quando $x \to a$



$\lim_{x \to a} R_1(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} \frac{R_1(x)}{(x-a)} = 0$

f n vezes diferenciável $a \in I$

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

P_n e f têm os mesmos pontos de contacto

$P_n(a) = f(a) \quad \dots \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$
$P_n'(a) = f'(a)$

Fórmula de Taylor

com resto de Lagrange

$\frac{R_n(x)}{(x-c)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0$
infinitésimo de ordem superior a n

$a \in I$, $f \in C^n(I)$ e existe $f^{(n+1)}$

$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$
$P_n(x)$ polinómio de Taylor da ordem n
$R_n(x)$ é o resto de ordem n e na forma de Lagrange

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\text{, existe } c \text{ entre } a \text{ e } x$$

o resto é menor quanto maior a derivada

NOTA:
na fórmula de Taylor quando $n=0$
$f(x) = f(a) + f'(c).(x-a)$
c entre a e x
$f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

ex:

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{6} \quad x \in [0,1]$$

$f(x) = e^{-x}$

$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} =$
$a=0 \quad = 1 - x + \frac{x^2}{2}$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad f'(x) = -e^{-x}, x=0$
$f'(0) = -1 \quad f''(0) = 1$

NOTA:
As funções elementares são indefinidamente diferenciáveis.
por exemplo: $f(x) = e^x$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Usando a fórmula de Taylor de segunda ordem em potências de x.

$f(x) = P_2(x) + R_2(x)$

$P_2(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} \qquad R_2(x) \overset{\text{Lagrange}}{=} f'''(c)\frac{x^3}{3!} \quad x \in [0,1]$, c está entre 0 e x

$$\left|e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\right| = \left|f(x) - P_2(x)\right| = |R_2(x)| = \left|\frac{e^{-c}x^3}{3!}\right| \leq \frac{1 \cdot |x|^3}{6} \leq \frac{1}{6} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$0 < c < x$, $x \in [0,1]$ $\quad e^{-c}_{c>0} < 1$

Previously in Cálculo 1...

31/10/2022

Fórmula de Taylor de ordem n, relativo à função f em potências de $x-a$.

$f \in C^n(I)$, intervalo $a \in \text{int}(I)$, existisse $f^{(n+1)}$ em I.

$f(x) = P_n(x) + \underbrace{R_n(x)}_{\text{função resto de ordem } n}$, $P_n(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$

$\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0$

$P_n(a) = f(a)$ $\quad P_n''(a) = f''(a)$

$P_n'(a) = f'(a)$ $\quad \dots \quad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$

Resto sob a forma de Lagrange

$R_n(x) = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, c entre a e x

ex:

Calcule o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de $x-1$, de f(x)

$f(x) = \arctan(x^2) - x \quad \in C^\infty(\mathbb{R})$ — todas as funções elementares são indefinidamente diferenciáveis

$a=1, \; n=2$

$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!} = \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) - \frac{1}{2}(x-1)^2$

$f(1) = \arctan(1) - 1$

$f'(x) = \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} - (x)' = \frac{2x}{1+x^4} - 1 \qquad f'(1) = 0$

$f''(x) = \frac{2(1+x^4) - 2x(4x^3)}{(1+x^4)^2} \qquad f''(1) = \frac{-4}{4} = -1$

Aplicação da fórmula de Taylor para a determinação de extremos locais

---

Seja $f \in C^{(n)}(I)$, $a \in \text{int}\, I$

$f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$

então • se n for par
- $f^{(n)}(a) > 0$, $f(a)$ é mínimo local
- $f^{(n)}(a) < 0$, $f(a)$ é máximo local

Demonstração:

$f(x) = \underbrace{P_{n-1}(x)}_{= \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}} + R_{n-1}(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}}_{=0} + R_{n-1}(x) =$

lagrange
$= f(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$, c está entre a e x

$\Rightarrow f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$

$f^{(n)}(a) > 0$, existe $V_\delta(a)$, $f^{(n)}(x) > 0$ e $(x-a)^n > 0$ (n par)
$f(x) - f(a) \geq 0 \quad x \in V_\delta(a)$

f é diferenciável em a

$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$, $x \in V_\delta(a)$ — f é convexa
$<$ — f é concava

$f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$ então

- se n for par — $f^{(n)}(a) > 0$, f é convexa em $V_\delta(a)$
  — $f^{(n)}(a) < 0$, f é concava em $V_\delta(a)$
- se n for impar f(a) é ponto de inflexão

Assintotas ao gráfico de f

Se D_f contém uma vizinhança de $+\infty$.

① Dizemos que $y = mx + p$ é uma assintota obliqua à direita à curva $y = f(x)$
$m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $p \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - p) = 0$$

Quando $m = 0$, $y = p$ diz-se uma assintota horizontal à direita da curva $y = f(x)$

Condições necessárias e suficientes para $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad e \quad b = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx$$

Analogamente para $x \to -\infty$

Assintotas verticais

$x = c$ diz-se uma assintota vertical relativamente à curva $y = f(x)$
$c \in \mathbb{R}$
se for verificada uma das seguintes condições

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty \quad , \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$$

T.P.C.:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-1}, & x>1 \\ \dfrac{3x^2+4x+1}{x}, & x<0 \end{cases}$$

Verifique se existem assíntotas.

Estudo de funções

$$f(x) = |x| e^{1-x^2} = \begin{cases} x e^{1-x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

1º) $D_f = \mathbb{R}$
2º) f é par
3º) continuidade
4º) diferenciabilidade em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f \geq 0$

$$f'(x) = e^{1-x^2} + x(-2x)e^{1-x^2} = (1-2x^2)e^{1-x^2}$$

$\Rightarrow f'(\sqrt{2}/2) = 0$ ponto de estabilidade

$\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{1-x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x^2}} = 0$ $y=0$ assíntota horizontal

$f(\mathbb{R}) = [0, f(\sqrt{2}/2)]$

Problemas

02/11/2022

i)
Escreva a fórmula de Taylor de grau 2 com resto de Lagrange relativo a f e em potências de x, $f(x) = \arctan(x^2)+1$ $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

ii)
Determine um majorante para o erro cometido ao aproximar f pelo $P_2(x)$ em I.

Resolução:

i) $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$

$f(x) = \arctan(x)+1$, f é da classe C^∞ pois resulta da composta e soma de funções elementares.

$$\boxed{P_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} = 1+x^2}$$

$a=0$, $n=2$, $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$, $f''(x) = \dfrac{2(1+x^4) - 2x4x^3}{(1+x^4)^2}$

$f(0) = 1$ $f'(0) = 0$ $f''(0) = 2$

$R_2(x) = f'''(c)\dfrac{(x-0)^3}{3!}$ c está entre 0 e x $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$f'''(x) = \left(\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}\right)' = \frac{-24x^3((1+x^4)^2) - (2-6x^4)\,2\cdot 4x^3(1+x^4)}{(1+x^4)^4} =$$

$$= \frac{-24x^3 - 24x^7 - 16x^3 + 48x^7}{(1+x^4)^3} = \frac{-40x^3 + 24x^7}{(1+x^4)^3}$$

$$f(x) = \underbrace{1+x^2}_{P_2(x)} + \underbrace{\frac{8c^3(-5+3c^4)}{(1+c^4)^3}\cdot\frac{x^3}{6}}_{R_2(x)} \quad c \text{ entre } 0 \text{ e } x$$

ii) $|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| = \left|f'''(c)\frac{x^3}{6}\right| = \left|\frac{8c^3(-5+3c^4)}{(1+c^4)^3}\cdot\frac{x^3}{6}\right| < \frac{1\cdot 6}{6}\cdot\frac{1}{8}$, ($8\times\frac{1}{2}$)

c entre 0 e x, $x \in [-1/2, 1/2] \Rightarrow |x| \leq 1/2$

$\boxed{\frac{1}{8} \text{ é um majorante}}$

$|-5+3c^4| \leq |-5| + |3c^4| < 6$

$0 < c < 1/2$ $\quad 3c^4 < 1$

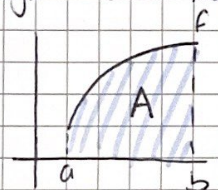
$-1/2 < c < 0$

$1+c^4 > 1 \Rightarrow \frac{1}{(1+c^4)^3} < 1 \qquad |x^3| = |x|^3 \leq (1/2)^3 \qquad |c|^3 < (1/2)^3$

02/11/2022

Integrais

Seja $f \in C([a,b])$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$

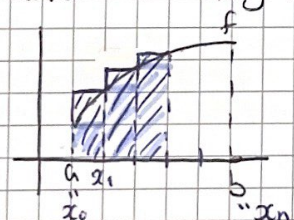


f é limitada em $[a,b]$

? área A ?

$\text{área } A = \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}_0^+$

- Como definir o integral de Riemann?
- Para que funções é possível definir o integral? (Quais as classes de funções integráveis à Riemann)
- Métodos de integração ($f \in C([a,b])$, F uma primitiva de f, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$)



$\boxed{S(f,d) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})}$ Somas superiores de Darboux

$M_k = \sup\limits_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t)$

$d = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ $\quad x_0 = a$, $x_n = b$

d decomposição de $I = [a,b]$

$\boxed{s(f,d) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})}$ Somas inferiores de Darboux

$m_k = \inf(f(t))$ $\quad t \in [x_{k-1}, x_k]$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

Seja $d \in \mathcal{D}(I)$ (o conjunto de todas as decomposições de I)

- $s(f,d) \leq S(f,d)$, $\quad m_k \leq M_k \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$M = \sup\limits_{[a,b]} f$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ $\qquad m(b-a) \leq s(f,d) \leq S(f,d) \leq M(b-a)$

Primitivação

Definição

Seja $f: I \to \mathbb{R}$, f diz-se primitivável em I se existir $F: I \to \mathbb{R}$

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I$$

ex:

1) $f(x) = x$ $\quad F(x) = \frac{x^2}{2}$ é uma primitiva de f

2) $f(x) = xe^{x^2}$ $\quad F(x) = \frac{e^{x^2}}{2}$ $\quad F'(x) = \frac{2xe^{x^2}}{2}$

No entanto $G(x) = \frac{e^{x^2}}{2} + 500$ é também uma primitiva de f

Proposição: Sejam F e G primitivas de f em I então $F - G$ é uma função constante em I

Demonstração: $H = F - G$, diferenciável em I
$H' = F' - G' = 0$ em I
$\underset{\text{Lagrange}}{\Rightarrow}$ H é uma constante

NOTA:
Sendo F uma primitiva de f em I então o conjunto de todas as primitivas de f

$$\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$$

Métodos de Primitivação

1º) Primitivação imediata

Vamos usar o símbolo $P(f(x))$ para indicar uma primitiva e P para a operação primitivação

$P(x^3) = \frac{x^4}{4}$, $\quad \begin{cases} P(x^p) = x^{p+1}/p+1, \ p \neq -1 \\ P(1/x) = \ln(x) \end{cases}$

$P\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \arctan(x) \Rightarrow (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

$P\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \text{arcsen}(x)$

2º) Primitivação por decomposição

$P\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}P\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) + P\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x)$

$P(\alpha f + \beta g) = \alpha P(f) + \beta P(g), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

! $P(fg) \neq P(f) \cdot P(g)$!

3º) Primitivação quase imediata

$u \equiv u(x)$ (exatamente igual) $\qquad (\ln(u))' = \frac{u'}{u} \qquad u(x) = 1+x^2$, $u' = 2x$

Fórmulas a partir das fórmulas da derivada de composição

$P(u' u^p) = \frac{u^{p+1}}{p+1}, p+1 \neq 0 \qquad P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln(u)$

$P\left(\frac{u'}{1+u^2}\right) = \arctan(u) \qquad P\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \text{arcsen}(u)$

$P(x e^{x^2}) = \frac{e^{x^2}}{2} \qquad u = x^2$, $u' = 2x \qquad (e^u)' = u' e^u \Rightarrow P(u' e^u) = e^u$

$P(x \overset{f'}{e^{2x}}) = \overset{f}{\frac{e^{2x}}{2}} \cdot x - P\left(\frac{e^{2x}}{2} \cdot 1\right) = \frac{e^{2x}}{2} x - \frac{e^{2x}}{4}$

4º) Primitivação por partes

$P(f' g) = fg - P(fg')$

$P f' = f$

Primitivação

22/11/2022

F é uma primitiva de f num intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

$F'(x) = f(x) \quad x \in I$

$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} \longrightarrow F(x) = \int f(x)\,dx$

$P(f(x))$ é uma primitiva de f, designação equivalente é $\int f(x)\,dx$

métodos

a) Primitivação imediata

$(\text{arcsen } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow P \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsen } x$

b) Primitivação por partes

$(fg)' = f'g + fg' \qquad P((fg)') = P(f'g + fg') \Leftrightarrow fg = P(f'g) + P(fg') \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(f'g) = fg - P(fg')$ → fórmula para a primitivação por partes

Ex1

$P\frac{\arctan(x)}{1+x^2} = \arctan^2(x) - P\frac{\arctan(x)}{1+x^2} \Leftrightarrow 2P\frac{\arctan(x)}{1+x^2} = \arctan^2(x) \Leftrightarrow$

$f'g \quad fg \quad fg'$

$g(x) = \arctan(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow f(x) = \arctan(x)$

$\Leftrightarrow P\frac{\arctan(x)}{1+x^2} = \frac{\arctan^2(x)}{2}$

$Px^p = \frac{x^{p+1}}{p+1}$

$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$

se usar uma função na variável x

$Pu'u^p = \frac{u^{p+1}}{p+1} \quad p \neq -1$

$u(x) = \arctan(x), \quad P\frac{\arctan(x)}{1+x^2} = Pu'u = \frac{u^2}{2}$

Exercícios

1) $Px\cos(x^2)$ 2) $P\overset{g}{x}\overset{f'}{\cos}x$ 3) $P((x^2+1)\cos x)$

$u(x) = x^2$

$Pu'\cos u = \operatorname{sen} u$

$Px\cos(x^2) = \frac{1}{2}P\underbrace{2x}_{u'}\underbrace{\cos(x^2)}_{\cos(u)} = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2}$

$\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2}\right)' = x\cos(x^2)$

$Px = \frac{x^2}{2} \qquad P\cos x = \operatorname{sen} x = f$

$Px\cos x = x\operatorname{sen} x - P(\operatorname{sen} x \cdot 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Px\cos x = x\operatorname{sen} x + \cos x$

3) $P((\underset{g}{x^2+1})\underset{f'}{\cos x}) \overset{P.P.}{=} (\underset{g}{x^2+1})\underset{f}{\operatorname{sen} x} - P(\underset{g'}{2x}\underset{f}{\operatorname{sen} x}) = (x^2+1)\operatorname{sen} x + 2x\cos(x) - 2\operatorname{sen} x$

CA:

$P(\underset{g}{x}\underset{f'}{\operatorname{sen} x}) \overset{P.P}{=} x(-\cos x) - P(-\cos x) \cdot 1 = -x\cos(x) + \operatorname{sen} x$

$\boxed{f = Pf' = P\cos x = \operatorname{sen} x}$

4) $P\underset{f'}{1}\underset{g}{\arctan(x)} \overset{P.P}{=} \underset{f}{x}\underset{g}{\arctan(x)} - P\frac{x}{1+x^2} =$

$= x\arctan(x) - \ln\sqrt{1+x^2}$

$u(x) = 1+x^2 \longrightarrow u'(x) = 2x$

$P\frac{u'}{u} = \ln|u|$

$P\frac{u'}{1+u^2} = \arctan(u)$

$a\ln b = \ln(b^a)$

Problema do valor inicial

Seja f primitivável em I, $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ então existe uma única primitiva F de f tal que $F(x_0) = y_0$

Demonstração:

existência: seja g uma primitiva qualquer de f, $g(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$ então g satisfaz a condição $g(x_0) = y_0$

unicidade: se existem duas primitivas que satisfazem a condição a sua diferença é uma constante C, mas C = 0 em x_0

Exercício:

① Determine a função que verifica as condições seguintes

$$f'(x) = \frac{1}{4+9x^2}, \ x \in \mathbb{R} \quad e \quad f(0) = 1$$

$$P\left(\frac{1}{4+9x^2}\right) = \frac{2}{3}\frac{1}{4} P \ \frac{1 \cdot 3/2}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \arctan\left(\frac{3x}{2}\right) \qquad u(x) = \frac{3x}{2}$$

expressão geral

$$f_c(x) = \frac{\arctan\left(\frac{3x}{2}\right)}{6} + c, \ c \in \mathbb{R}$$

$$1 = f_c(0) = \frac{\arctan(0)}{6} + c \Rightarrow c = 1$$

$$f(x) = \frac{\arctan\left(\frac{3x}{2}\right)}{6} + 1 \ //$$

① Determine a função g que satisfaz as condições:

$$g'(x) = \frac{1}{x-1}, \ x \neq 1 \qquad g(0) = 0 \quad e \quad g(2) = 3$$

expressão geral

$$g_{c_1,c_2}(x) = \begin{cases} \ln(x-1) + c_1, & x > 1 \\ \ln(1-x) + c_2, & x < 1 \end{cases}$$

$g(0) = 0 \qquad \ln(1-0) + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$

$g(2) = 3 \qquad \ln(2-1) + c_1 = 3 \Leftrightarrow c_1 = 3$

$$g(x) = \begin{cases} \ln(x-1) + 3, & x > 1 \\ \ln(1-x), & x < 1 \end{cases} \ //$$

Problemas

24/11/2022

Primitivação

$f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo f é primitivável em I se existir $F: I \to \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$, $x \in I$

ex:

1) Dada $f(x) = x^2$ $\qquad F(x) = x^3/3$

2) $P(f(x))$ $\qquad P(x^2) = \frac{x^3}{3}$ uma primitiva de f!

$\frac{x^3}{3} + C, C \in \mathbb{R}$ a expressão geral de todas as primitivas de x^2, $I = \mathbb{R}$

→ $P(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha P(f(x)) + \beta P(g(x)), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (linearidade)

→ $P \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsen}\, x$, uma vez que $(\text{arcsen}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Primitivação imediata resulta da inversão das fórmulas da derivação + composição com uma função u na variável x

$$P \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arcsen}\, u$$

$\boxed{P\, u' u^p = \frac{u^{p+1}}{p+1} \quad p \neq -1}$

ex:

1) $\frac{1}{-2} P \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} P\, u' u^{-1/2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} = -\sqrt{1-x^2}$

$u(x) = 1 - x^2 \qquad u'(x) = -2x$

2) $P \frac{2}{\sqrt{1-x}} = 2P \frac{1}{\sqrt{1-x}} = -4\sqrt{1-x}$

$(\sqrt{1-x})' = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \qquad (-2\sqrt{1-x})' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

3) $P \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{2} \underbrace{P \frac{2x}{x^2+1}}_{\ln(\sqrt{x^2+1})} + \underbrace{P \frac{1}{x^2+1}}_{\text{arctan}\, x} = \ln(\sqrt{x^2+1}) + \text{arctan}\, x$

$\frac{1}{2} \ln(x^2+1)$?

função racional vai ser uma das 3 a azul

$\boxed{P \frac{u'}{u} = \ln|u|}$ $\qquad u(x) = x^2+1$
$u'(x) = 2x$

4) $P \frac{x}{1+x^4} = P \frac{x}{1+(x^2)^2} = \frac{\text{arctan}(x^2)}{2}$ $\qquad \boxed{P \frac{u'}{1+u^2} = \text{arctan}(u)}$

$P \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\text{arcsen}\, x} = \underset{f}{x}\, \underset{g}{\text{arcsen}\, x} - P\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = x \,\text{arcsen}\, x + \sqrt{1-x^2}$

$\boxed{P(f'g) = fg - P(fg')}$

$P \underset{g}{x} \underset{f'}{\cos(2x)} = x \frac{\text{sen}(2x)}{2} - P\left(\frac{\text{sen}(2x)}{2} \cdot 1\right) =$

$P x \cos(x^2) = \frac{\text{sen}(x^2)}{2}$

→ P.P. 2 vezes

$P x^2 \cos(2x)$

Primitivação de funções racionais

25/11/2022

ex: de funções racionais com primitiva imediata

1) $P \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1}$

3) $P \frac{x+1}{x^2+4} = \frac{1}{2} P \frac{2x}{x^2+4} + P \frac{1}{x^2+4} = \frac{\ln(x^2+4)}{2} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) =$

2) $P \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{4} P \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{4} \cdot 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$

$= \ln\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$

Sejam P, Q polinómios e $R = \frac{P}{Q}$

1- R não é uma função racional própria ou seja grau $P \geq$ grau Q

$\frac{P(x)}{Q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$, g e r são polinómios únicos e grau r < grau Q

$P(x) = g(x)Q(x) + r(x)$

ex:

$\frac{x^5}{x^4-2}$ grau $P \geq$ grau Q

$$\begin{array}{r|l} x^5 & x^4-2 \\ \hline -x^5+2x & x \\ 0+2x & \end{array}$$

$r(x) = 2x$
$Q(x) = x$

$\frac{x^5}{x^4-2} = x + \frac{2x}{x^4-2}$

2- R é uma função racional própria grau P < grau Q.
Neste caso vamos decompor Q(x) no produto de polinómios.

ex:

$R(x) = \frac{2x}{x^4-2}$ $\quad Q(x) = x^4-2 = (x^2)^2 - 2 = (x^2+\sqrt{2})(x-\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2})$

$y^2 - 2 = (y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})$

$Q(x) = (x^2+\sqrt{2})(x-\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2})$

$(x^2+\sqrt{2})$	$(x-\sqrt[4]{2})$	$(x+\sqrt[4]{2})$
irredutível	irredutível	irredutível
do 2º grau	do 1º grau	do 1º grau
sem multiplicidade	sem multiplicidade	sem multiplicidade

As frações simples são $\frac{Ax+B}{x^2\sqrt{2}}, \frac{C}{x+\sqrt[4]{2}}, \frac{D}{x-\sqrt[4]{2}}$

$\frac{P}{Q} = \frac{2x}{x^4-2} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}} + \frac{C}{x+\sqrt[4]{2}} + \frac{D}{x-\sqrt[4]{2}}$

são os zeros $2x = (Ax+B)(x^2-\sqrt{2}) + C(x^2+\sqrt{2})(x-\sqrt[4]{2}) + D(x^2+\sqrt{2})(x-\sqrt[4]{2})$

substitui

$\boxed{x = \sqrt[4]{2}} \Rightarrow 2\sqrt[4]{2} = D(2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt[4]{2}) \Leftrightarrow D = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\boxed{x = -\sqrt[4]{2}} \Rightarrow -2\sqrt[4]{2} = C(2\sqrt{2} \cdot (-2\sqrt[4]{2})) \Leftrightarrow C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$0x^3+0x^2+x+0=(A+C+D)x^3+(\ldots)x^2+(\ldots)x+\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}.D-\sqrt{2}\sqrt[4]{2}C-B\sqrt{2}=$

$$\begin{matrix} x^3 \\ x^0 \end{matrix}\begin{cases} A+C+\overset{\frac{1}{\sqrt{2}}}{D}=0 \\ \underbrace{\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}D-\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}C}_{=0}-\sqrt{2}B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1/\sqrt{2} \\ B=0 \end{cases}$$

$$P\frac{1}{x+\sqrt[4]{2}}=\ln|x+\sqrt[4]{2}| \qquad P\frac{x}{x^2+\sqrt{2}}=\frac{\ln|x^2+\sqrt{2}|}{2}$$

$$P\frac{2x}{x^4-2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}P\frac{x}{x^2+\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(P\frac{1}{x+\sqrt[4]{2}}+P\frac{1}{x-\sqrt[4]{2}}\right)$$

ex:

1. $$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$$

2. $$\frac{1}{x^3(x^2+1)}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

3. $$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Primitivação por substituição

$$P(f(x)) \underset{\varphi^{-1}(x)=t}{\overset{x=\varphi(t)}{\rightleftarrows}} P(f(\varphi(t))\varphi'(t))$$

$x=\varphi(t)$ bijetiva + diferenciável

$$P\frac{1}{x\sqrt{x-1}} \xrightarrow{x>1} = 2\arctan(\sqrt{x-1})$$

$$\underbrace{\sqrt{x-1}}_{\varphi^{-1}(x)}=t \Rightarrow x=t^2+1=\varphi(t)\Rightarrow \varphi'(t)=2t$$

$$P\frac{1}{x\sqrt{x-1}} \rightarrow P\frac{1}{(t^2+1)t}2t=2P\frac{1}{t^2+1}=2\arctan t$$

Problemas

28/11/2022

$$P\frac{1}{4+x^2}=\frac{1}{4}P\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}P\frac{1/2}{1+(\frac{x}{2})^2}=\arctan\left(\frac{x}{2}\right)/2$$

$$\frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\arctan(x))'=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow \arctan(x)=P\frac{1}{1+x^2}$$

$$u\equiv u(x) \qquad (\arctan(u))'=u'.\frac{1}{1+u^2}\Rightarrow \boxed{P\frac{u'}{1+u^2}=\arctan u}$$

- $P \frac{e^x}{4+e^{2x}} = \frac{\arctan(e^{x/2})}{2}$ $\quad (e^{2x}) = (e^x)^2$

Primitivação por partes

$P(f'g) = fg - P(fg')$ $\quad Pf' = f$

$\underset{f'}{P}\arctan(x) = \underset{f}{x}\,\underset{g}{\arctan(x)} - P\,\underset{f}{x}\,\underset{g'}{\frac{1}{1+x^2}} = x\arctan(x) - \frac{1}{2} P \frac{2x}{1+x^2} =$ $\quad f = P1 = x$

$= x\arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$ $\quad P\frac{v'}{v} = \ln|v| \quad v(x) = 1+x^2, \; v'(x) = 2x$

$P(\ln^2 x)$, $P(\arcsen^2 x)$??

- $P\,\underset{g}{x^2}\,\underset{f'}{\cos x} = x^2 \operatorname{sen} x - P\,\underset{g'}{2x}\,\underset{f'}{\operatorname{sen} x} = x^2 \operatorname{sen} x - (-\cos x \cdot 2x - P -\cos x \cdot 2) = x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x$

- $\frac{1}{2} P\, 2x\cos(x^2) = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2}$ $\quad \boxed{P v' v^p = \frac{v^{p+1}}{p+1}, \; p \neq -1}$

- $P\frac{\arctan(x)}{1+x^2} = P(\arctan(x))'\,\underset{v}{\arctan(x)} = \frac{\arctan^2(x)}{2}$

Observação:
$P\frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)$??
$= \arctan^2(x) - P\frac{\arctan(x)}{1+x^2}$
$\Rightarrow 2P\frac{\arctan(x)}{1+x^2} = \arctan^2(x)$

T.P.C.
$Pe^x \operatorname{sen} x$

- $P\frac{1}{\sqrt{x+4}\cdot x} = \ln\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}}$

$x \in I \quad P(f(x)) \xrightarrow{x=\varphi(t)} P(f(\varphi(t)), \varphi'(t)) \quad t \in J$

$\varphi: J \to I \quad \underset{\varphi^{-1}(x)}{\sqrt{x+4}} = t$

$\sqrt{x+4} = t \Rightarrow$

$P(f(\varphi(t)), \varphi'(t)) = P\frac{1}{t\cdot(t^2-4)}\cdot 2t = P\frac{2}{t^2-4} = *$

$* = P\left(\frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2}\right) = A\ln|t+2| + B\ln|t-2| = *$

$x = t^2 - 4 = \varphi(t)$
$\varphi'(t) = 2t$

$t^2 - 4 = \underbrace{(t+2)(t-2)}_{1^{\circ} \text{ grau simples}}$

$A, B = ?$ $\quad \frac{2}{t^2-4} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2} \Rightarrow 2 = A(t-2) + B(t+2)$

$t=2: \; 2 = B(2+2)$
$t=-2: \; 2 = A(-2-2)$

$A = -1/2 \quad B = 1/2$

$* = \ln\sqrt{\left|\frac{t-2}{t+2}\right|}$

Algumas classes de funções racionais e trigonométricas

29/11/2022

Assumindo, R, uma função racional

$$R\left(x, \left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{1/2}\right) \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R} \longrightarrow R(\varphi(t), t) \cdot \varphi'(t)$$

$P f(x) \xrightarrow{x=\varphi(t)} P(f(\varphi(t))\varphi'(t))$

φ é invertível e diferenciável

$$\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{1/2} = t \Rightarrow \frac{x-\alpha}{x-\beta} = t^2 \Rightarrow \frac{x-\beta}{x-\beta} + \frac{\beta-\alpha}{x-\beta} = t^2 \Rightarrow \frac{\beta-\alpha}{x-\beta} = t^2-1 \Leftrightarrow \frac{(\beta-\alpha)}{t^2-1} = x-\beta$$

$$\varphi(t) = \frac{\beta-\alpha}{t^2-1} + \beta \; ; \quad \varphi'(t) = \frac{-2t(\beta-\alpha)}{(t^2-1)^2}$$

Ex:

$$P\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = P\frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2-x}{x-1}\right)^{1/2}} \; {=t} \longrightarrow P\frac{1}{2-\frac{1}{t^2+1}-1} \cdot \frac{2t^2}{(t^2+1)^2} = P\frac{1}{\frac{t^2}{t^2+1}} \cdot \frac{2t^2}{(t^2+1)^2} = P\,2\frac{t}{t(t^2+1)} = *$$

$$\left(\frac{2-x}{x-1}\right)^{1/2} = t \Rightarrow \frac{2-x}{x-1} = \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} = -\frac{1}{t^2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} = -t^2 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x-2} = -t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = -1-t^2 \Leftrightarrow x-2 = \frac{-1}{t^2+1} \Leftrightarrow x = 2 - \frac{1}{t^2+1} = \varphi(t)$$

$$\varphi'(t) = \frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

$$= 2\arctan\left(\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{1/2}\right)$$

$$* = 2P\frac{1}{t^2+1} = 2\arctan(t)$$

R(sen x, cos x)

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctan t \Leftrightarrow x = 2\arctan(t) = \varphi(t)$$

$$\varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2} \qquad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = t^2, \; \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}, \; \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2} - 1 + \frac{1}{1+t^2} = \frac{2-1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

ex:

$$P\frac{1}{1+\operatorname{sen}x+\cos x} \xrightarrow{x=\varphi(t)} P\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2} = P\frac{2}{1+\cancel{t^2}+2t+1-\cancel{t^2}} = P\frac{2}{2+2t} = P\frac{1}{1+t} =$$

$$= \ln|1+t| = \ln|1+\tan(x/2)|$$

$$P\frac{e^x}{e^{3x}+1} \xrightarrow{e^x=t \quad x=\ln t=\varphi(t)} P\frac{t}{t^3+1}\cdot\frac{1}{t}$$

Resoluções de equações diferenciais ordinárias

com variáveis separadas (EDO)

Dada uma equação do tipo

$$y'(x) = 1+x+x^2 \quad ①$$

procuramos uma solução $y(x)$, $x \in I$ intervalo que satisfaz ①

As soluções de ① são $y(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$, $C \in \mathbb{R}$ se ainda tivermos

uma condição $y(1) = 2 \Rightarrow C = 2 - 1 - 1/2 - 1/3$

$$2 = y(1) = 1 + 1/2 + 1/3 + C$$

$$y(x) = x + x^2/2 + x^3/3 + 1/6$$

Neste caso o domínio máximo onde a função $y(x)$, satisfaz ① e $y(1)=2$ é $I = \mathbb{R}$

ex 2:

Determinar a função $y: I$ que satisfaz ① e ②

$$y'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \quad ① \qquad e \qquad y(0) = 1 \quad ②$$

Primitivando ambos os membros → o domínio máximo $0 \in I =]-1, +\infty[$

$(y' = f(x) \Rightarrow y(x) = \frac{-1}{x+1} + C$, $y(0) = 1 \Rightarrow C = 2$ $\qquad x \in]-1, +\infty[$

Todos os intervalos q não contenham $x = -1$

Dadas f, g funções contínuas procuramos soluções que satisfaçam

$$g(y(x))\,y'(x) = f(x)$$

$\boxed{g=1, \text{ exemplos anteriores}}$

sejam F e G primitivas de f e g

$$G(y(x)) = F(x)$$, se G for invertível

$G'(y(x)) = G'(y(x)).\,y'(x) = g(y(x)).\,y'(x)$ $\Rightarrow y(x) = G^{-1}(F(x))$

Ex 3:

$y'y = x$ (1) e $y(3) = -2$ (2)
$\in \mathbb{R}^-$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y^2 = x^2 - 5,$
$\Rightarrow y = -\sqrt{x^2-5}$

$\frac{4}{2} = \frac{9}{2} + C \Leftrightarrow C = -\frac{5}{2}$

Ex 4:

$y' = y^2+1$ $y(0) = 1$

$\frac{y'}{y^2+1} = 1$

$\arctan y = x + C$

$\pi/4 = C$

$y = \tan(x + \pi/4)$

$0 \in I$ $I = -\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

$-\frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

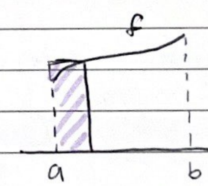
Integral de Riemann

02/12/2022

f limitada em $I = [a,b]$

- d - decomposição do intervalo de $[a,b]$ em n subintervalos

$d = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ $x_n = b$



$D([a,b])$ conjunto de todas as decomposições de I

$M_i = \sup f(x)$ $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, \ldots, n$
$m_i = \inf f(x)$ $x \in [x_{i-1}, x_i]$

Somas de Darboux

$S(f,d) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ ⇝ soma superior

$M_i \geq m_i$ $i = 1, \ldots, n$
para $d \in D(I) \Rightarrow S(f,d) \geq s(f,d)$

$s(f,d) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ ⇝ soma inferior

Definição

d' diz-se uma decomposição mais fina que d se $d \subset d'$

$$s(f,d') \geq s(f,d) \; ; \; S(f,d') \leq S(f,d)$$

$d \in D(I)$

$$m(b-a) \leq s(f,d) \leq S(f,d) \leq M(b-a)$$

$$M = \sup_I f \qquad m = \inf_I f$$

$d_1, d_2 \in D(I)$

$$s(f,d_1) \leq S(f,d_2)$$

$d' = d_1 \cup d_2$, d' é mais fina que d_1 e d_2

$$s(f,d) \leq s(f,d') \leq S(f,d') \leq S(f,d)$$

$H = \{S(f,d), d \in D(I)\}$ $\qquad$ $L = \{s(f,d), d \in D(I)\}$

o conjunto H é minorado $\Rightarrow$ existe $\inf_{d \in D} H = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ $\Rightarrow$ existe $\sup_{d \in D} L = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Definição - integral de Rieman

Existe o integral de Riemann para f em I se

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

NOTA:
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Neste caso diz-se que f é integrável à Riemann.

ex:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad d \in D$$

$\boxed{\text{não é integral à Riemann}}$

$f = D|_{[a,b]}$, $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = 1$ $\qquad i = 1, \dots, n$

$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = 0$

$S(f,d) = (b-a)$

$s(f,d) = 0$

$$\underline{\int_a^b} f = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f = b-a$$

→ A condição de f ser limitada para a integrabilidade de f, não é condição suficiente (do exemplo anterior)

$$f \text{ limitada} \Leftarrow f \text{ integral}$$
$$\cancel{\Rightarrow}$$

$$S(f,d) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b-a$$