# Cálculo Diferencial e Integral I

19/09/202

Prof.: António Bravo
Gabinete 2.N4.24
ext. 5016

1MAP45: teste 45 min. 30% nota final
25/10 18:15h
2MAP45: teste 45 min 30% nota final
13/12 18:15h
E60: 60 min.
23/01 8h

ER: 2h
08/02 8h

não podemos usar calculadoras

## Lógica

1) Designações, Proposições

1 $1 \neq 1$

- Uma proposição pode ser verdadeira ou falsa
- Operações: $\sim, \wedge, \vee$

| $\sim p$ | $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \wedge q$ | $p \Rightarrow q$ | $\sim p \vee q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | F | F | F |
| V | F | V | V | F | V | V |
| V | F | F | F | F | V | V |

$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$

$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$

em $\mathbb{N}$ $p^2$ é par $\Rightarrow p$ é par
$p \in \mathbb{N}$ $p$ é ímpar $\Rightarrow p^2$ é ímpar

$p$ é ímpar ($p = 2k-1, k \in \mathbb{N}$)

$p^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k-1) + 1$ , $k \in \mathbb{N}$

$\underbrace{2k(2k-2)} + 1$

$\underbrace{\underbrace{2(k(2k-2))}_{\text{par}} + 1}_{\text{é ímpar}}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Se $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $p$ e $q$ primos entre si

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ $p^2 = 2q^2$ $p$ par $p = 2k$
$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2$ é par

se $p$ e $q$ são pares não podem ser primos entre si

$y_0 = 1$
$y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{2}{y_n}\right)$ se existir o limite de sol(u)ção $y_n$

exemplo:

$B = \{x : x^4 + 3x^3 + 2x^2 \leq 0\} = [-2, -1] \cup \{0\}$

$x^2(x^2 + 3x + 2) \leq 0$
$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 \leq 0$
$(x+1)(x+2)$
os nº que multipl dão 2
e somados dão 3

$\text{Maj}_B = [0, +\infty[$
$\text{Min}_B = ]-\infty, -2]$

- o supremo do conjunto é o elemento mínimo do conjunto dos majorantes
- o ínfimo " " " " " máximo " " " minorantes

entre dois reais existe sempre um racional e um irracional

$B \setminus \mathbb{Q} = ]-2, -1[ \setminus \mathbb{Q}$

Revisões Problemas 21/09/2022

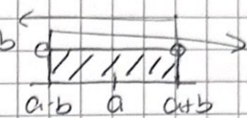
- $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| + 1 > 2x\}$

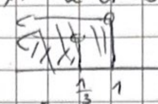
$b > 0$

$|x-a| < b$

$|x| > 2x - 1 \Leftrightarrow x > 2x - 1 \vee x < -(2x-1) \Leftrightarrow x - a < b \wedge x - a > -b$

$\Leftrightarrow 1 > x \vee x < \frac{1}{3}$




$]-\infty, 1[ \cup ]-\infty, \frac{1}{3}[$ $\quad S = ]-\infty, \frac{1}{3}[$

- $B = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 5x^3 - 6x^2 \leq 0\}$

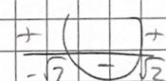
$x^2(\underbrace{x^2 - 5x - 6}_{(x-6)(x+1)}) \leq 0$

- $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^4 - 4}{|x-1|} \leq 0\} = [-\sqrt{2}, 1[ \cup ]1, \sqrt{2}]$

$|x-1| \geq 0 \Rightarrow x^4 - 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x^2-2)(x^2+2) \leq 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \vee \underbrace{x^2 \leq -2}_{\text{eq. imp}} \wedge x \neq 1 \Rightarrow x \geq -\sqrt{2} \wedge x \leq \sqrt{2} \wedge x \neq 1$

$x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \setminus \{1\}$




$\sum_{k=1}^{4} (2k+1) = 2 \sum_{k=1}^{4} k + \sum_{k=1}^{4} 1 = 2\left(\frac{1+4}{2} \times 4\right) + 4$

$\sum_{k=1}^{4} 1 \rightarrow 1+1+1+1$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{k=1}^{4} a_k$

$0{,}3333 = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003$

$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} = \sum_{k=1}^{4} \frac{3}{10^k} = 3 \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{1}{10}\right)^k$

$0,(3) = 3 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{1}{3}$ $\qquad \frac{3 \frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in \mathbb{R} \qquad e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

Aula dúvidas
Zoom $5^{a}$ 16h-17:30h

## Teórica Prática

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

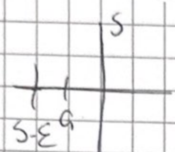
## Princípio da completude

Seja $A \neq \emptyset, A \subset \mathbb{R}$
A é majorado então existe o supremo de A

## Teorema

Seja $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ majorado e sendo $S = \sup A$

$\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} \; a > S - \varepsilon$ $\quad a > S - \varepsilon$




1) $S \in A \Rightarrow S = \text{máx. } A$
2) $S \notin A$

$x \in$ Domínio $\mathbb{R}$ $\qquad P(x) = x^2 > 0$

$\forall_{x \in \mathbb{R}} P(x)$ prop. é falsa $\qquad \sim (\forall_{x \in \mathbb{R}} P(x)) = \exists_{x \in \mathbb{R}} \sim P(x) \Leftrightarrow$
$\exists x \in \mathbb{R} \; P(x)$ prop. é verdadeira $\qquad (\Rightarrow) \exists x \in \mathbb{R} \; x^2 \leq 0$ $\qquad$ P.V.

$\sim (\exists_{x \in \mathbb{R}} P(x)) = \forall_{x \in \mathbb{R}} \; x^2 \leq 0$

$\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} \quad (\forall_{y \in \mathbb{R}} \forall_{x \in \mathbb{R}})$

$\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} \; y > x^2$ $\quad$ P.V.

$\sim (\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} \; y > x^2) = \exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} \; y \leq x^2$ $\quad$ P.F.

$x = 0 \qquad y \leq 0$ imp $y \in \mathbb{R}$

$\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} \; y \leq x$ $\quad$ P.V.

## Demonstração

$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q \qquad \sim(\sim P \vee Q) = P \wedge \sim Q$

$Q: \; \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} \; a > S - \varepsilon$

$\sim Q: \; \exists_{\varepsilon > 0} \forall_{a \in A} \; a \leq S - \varepsilon$

$\Rightarrow S - \varepsilon$ seria majorante de A o que não é possível pois S é o menor dos majorantes

exemplos:

$A = ]0, 1[ \cup \{2\}$ $\qquad$ Maj $A = [2, +\infty[$ $\qquad \sup A = 2 \in A \Rightarrow$ existe máx. $A = 2$
$\inf A = 0 \neq$ max. Min A
$\inf A \notin A \Rightarrow \not\exists$ existe min A

$A \setminus \mathbb{Q} = ]0,1[ \setminus \mathbb{Q}$ $\sup A \setminus \mathbb{Q} = 1$

· $\mathbb{N}$ ñ é majorado
se $\mathbb{N}$ fosse majorado existiria $s = \sup \mathbb{N}$
considerando $\varepsilon = 1 > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$
$m > s - \varepsilon$

$m > s - 1$
$m + 1 > s$ e $m+1 \in \mathbb{N}$ e $s$ não seria majorante
impossível

· $\forall a, b > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ $ma > b$

· $\frac{1}{n} < b$ existe $n \in \mathbb{N}$ $nb > 1$

· $mb > \sqrt{2}$

· $0 < \frac{1}{n} < b$ $0 < \frac{\sqrt{2}}{n} < b$

$r, i \Rightarrow r \cdot i$ irracional
↓ ↘ irracional
racional

por absurdo negamos a tese consideramos a hipótese

$P(n)$, $n \in \mathbb{N}$

<u>exemplo:</u> $P(n)$ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{Método de indução}}$
$P(n)$ prop. verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$

1) $n = 1$ $P(1)$ prop. verd.
2) fixado $n$, $P(n)$ prop $v \Rightarrow P(n+1)$ prop. verdadeira

por indução

1) $\overset{n=1}{\sum_{k=1}^{1}} k^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$ e, $1 = 1$ P.V

2) $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}_{\text{tese}}$

por indução
2) demonstração da tese

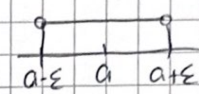
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{HI} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

# noções topológicas em $\mathbb{R}$

26/09/2022

$A \subset \mathbb{R}$

- $a$ é um ponto interior de $A$ sse $\exists_{\varepsilon>0}$ $V_\varepsilon(a) \subset A$.
  ($a \in A$)

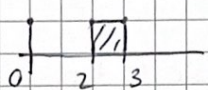



$V_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\} = ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

$Int(A)$ é o conjunto de todos os pontos interiores de $A$

ex:

$A = \{0\} \cup [2,3]$




$int\, A = ]2,3[$

- $b \in \mathbb{R}$ é um ponto da fronteira de $A$ sse $\forall_{\varepsilon>0}$ $V_\varepsilon(b) \cap A \neq \emptyset \wedge V_\varepsilon(b) \cap A^c \neq \emptyset$

complementar de A ($\mathbb{R} \setminus A$)

(qualquer vizinhança de b tem um ponto de A e outro que não pertence a A)

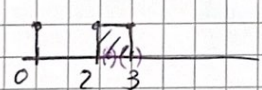
$Front(A)$ = conjunto de todos os pontos da fronteira

$\boxed{ext\, A = int(\mathbb{R} \setminus A)}$ → exterior de A

$\mathbb{R} = int\, A \cup Front\, A \cup ext\, A$

ex: conjuntos dijuntos

$Front\, A = \{0, 2, 3\}$




Seja $A \subset \mathbb{R}$

- $A$ diz-se um conjunto aberto se $A = int(A)$
- $\bar{A} = int(A) \cup Front A$ diz-se a aderência de $A$
- $A$ diz-se um conjunto fechado $\bar{A} = A$
- $A$ diz-se um conjunto limitado se $A$ for majorado e minorado

ex:

$B = ]0,1]$ é um conj. q ñ é aberto nem fechado

$\bar{B} = [0,1]$ $\quad int(B) = ]0,1[$ $\quad Front\, B = \{0,1\}$

ex. de um subconj de $\mathbb{R}$ q seja fechado e não limitado:

$[1, +\infty[$ $\quad \mathbb{N}$

↳ interior é vazio

fronteira é 1 e o interior é $]1, +\infty[$

$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(D) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), \text{ para } x \in D\}$

contradomínio de f

f injetiva em D : $x_1, x_2 \in D$ , $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

## Composição de funções

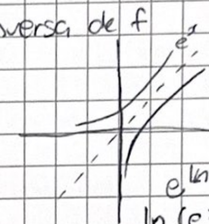
$f: D_f \to \mathbb{R}$ , $g: D_g \to \mathbb{R}$ $\qquad D_{f\circ g} = \{x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

$f \circ g : D_g \xrightarrow{g} g(D_g) \subset D_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$f \circ g$

## Função inversa

Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$, injetiva então existe, g, função inversa de f




são funções estritamente crescentes

$g: f(D_f) \to D_f$

$$\begin{cases} (f \circ g)(y) = f(g(y)) = y \in f(D_f) \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x \in D_f \end{cases}$$

$e^{\ln(x)} = x, x \in \mathbb{R}^+$

$\ln(e^y) = y , y \in \mathbb{R}$

ex:

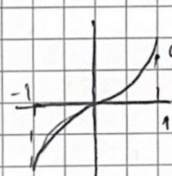
Seja $f(x) = \operatorname{sen} x \qquad x \in \mathbb{R}$

f é injetiva em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Downarrow$

existe g


$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$




**Nota:**

f é estritamente crescente

$\Downarrow$

f é injetiva

$\forall x_1, x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} y) = y \in [-1, 1] \qquad y = f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$

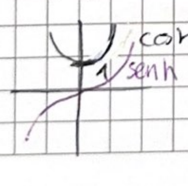
## Funções hiperbólicas

$f_1(x) = \operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ , $\qquad f_2(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

cosseno hiperbólico

$D_{f_1, f_2} = \mathbb{R} \qquad (\cosh(x))^2 - (\operatorname{senh}(x))^2 = 1 \quad x \in \mathbb{R}$

$(\cosh(t), \operatorname{senh}(t)) \quad t \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2 - y^2 = 1$




$D'_{\operatorname{senh}} = \mathbb{R}$

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$

| | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| sen | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

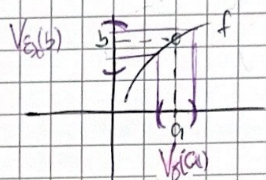
$\arcsin\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

Seja $f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \in \overline{D_f}$, $b \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{\delta > 0}\ \forall x\ (x \in D_f \wedge \underbrace{|x-a| < \delta}_{V_\delta(a)} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - b| < \varepsilon}_{f(x) \in V_\varepsilon(b)})$

$\boxed{\begin{array}{l} A, B \in \mathbb{R} \\ A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A \Rightarrow a \in B \end{array}}$




$f(V_\delta(a)) \subset V_\varepsilon(b)$

em $f(x) = x$
$\delta = \varepsilon$
em $f(x) = x^2$
$\delta = \sqrt{\varepsilon}$
em $f(x) = \sqrt[3]{x}$
$\delta = \varepsilon^3$

28/09/2022

# Prática

**Princípio do supremo**

$A \subset \mathbb{R}$, $A$ é majorado e não vazio então existe o supremo de $A$, $\sup A$ e por definição: $\sup A = \min(\mathrm{Maj}(A))$

$A \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall a\ (a \in A \Rightarrow a \in \mathbb{R})$

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ é minorado existe $\inf A = \max(\mathrm{Min}(A))$

ex:

$\{-\sqrt{2}\} \cup \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup ]1, \sqrt{2}] \cup \{3\} =: A$

$A$ é limitado, pois $-3$ é um minorante e $10$ é um majorante

$\sup A = 3$, $\inf A = -\sqrt{2}$
$\in$ $\qquad \in A \Rightarrow$ existe $\min A$
$A \Rightarrow$ existe $\max A$

$B = (A \cap \mathbb{Q}) = \{0\} \cup \overbrace{\{1/n : n \in \mathbb{N}\}}^{\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}} \cup (]1, \sqrt{2}[ \cap \mathbb{Q})$

$B$ tb é limitado e $\sup B = \sqrt{2} \notin$ ñ existe $\max B$
$\inf B = 0 \in B \Rightarrow$ existe $\min B = 0$

$C = A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{-\sqrt{2}\} \cup ]1, \sqrt{2}] \setminus \mathbb{Q}$

$C$ é limitado $\Rightarrow \mathrm{Maj}(C) = [\sqrt{2}, +\infty[ \Rightarrow \sup C = \sqrt{2} = \max C$
$\Rightarrow \mathrm{Min}(C) = ]-\infty, -\sqrt{2}] \Rightarrow \inf C = -\sqrt{2} = \min C$

arc

# Método de indução matemática

(1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ $\{ P(n)$

O método de indução matemática consiste: 1) $n=1$ $P(1)$ Prop. verdadeira (substituir)

2) fixado $n$, $P(n) \Rightarrow P(n+1) \rightarrow$ Tese

(pretende-se mostrar a implicação anterior)

Hipótese de indução

* demonstração da tese:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=n+1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} \underset{H.I}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{\cancel{(n+1)}(n+2)} =$$

$$= \frac{n+1}{n+2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

* Hipótese de indução: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ $\Rightarrow$ Tese: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$

(2) $n! \geq 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ $\{ P(n)$

por indução: 1) $n=1$ $1! \geq 2^0$ P.V.

2) fixado $n$, $\underbrace{n! \geq 2^{n-1}}_{H.I} \Rightarrow \underbrace{(n+1)! \geq 2^n}_{Tese}$

demonstração tese:

$$(n+1)! = (n+1)\, n! \underset{\substack{n \geq 1 \\ n \in \mathbb{N}}}{\geq} (n+1)\, 2^{n-1} \underset{n+1 \geq 2}{\geq} 2 \times 2^{n-1} \Rightarrow (n+1)! \geq (n+1)\, 2^{n-1} \geq 2^n \Rightarrow (n+1)! \geq 2^n$$

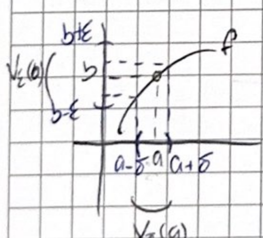
# Limite de funções

28/09/2022

$f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \in \overline{D_f}, \; b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \, (x \in D_f \wedge |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$




$x \in D_f \cap V_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b)$

$f(V_\delta(a) \cap D_f) \subset V_\varepsilon(b)$

$V_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} = ]a-\delta, a+\delta[$

$-\delta < x - a < \delta$

$a - \delta < x < a + \delta$

ex:

$\lim_{x \to 2} (2x+3) = 7$ pela definição $f(x) = 2x+3$ $D_f = \mathbb{R}$ $a=2$ $b=7$

$|f(x) - b| = |2x+3-7| = |2x-4| = 2|x-2| < 2\delta = \varepsilon$

$\lim_{x\to 2}(2x+3)=7 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\frac{\varepsilon}{2}\ \forall x\ |\overset{a}{x-2}|<\delta \Rightarrow |f(x)-\overset{b}{7}|<\varepsilon$

para q $|f(x)-7|<\varepsilon$ basta considerar $2\delta=\varepsilon \Leftrightarrow \delta=\varepsilon/2$

## Propriedades algébricas

1) $\lim_{x\to a} f(x)=b$ b é único

unidade do limite

2) operações algébricas

$f\pm g,\ f\cdot g \qquad D_{f\pm g,\,f\cdot g}=D_f\cap D_g=D$

$\lim_{x\to a} f(x)=b,\ \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} g(x)=c \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=b\pm c$

analogamente para $f\cdot g$, $f/g$

ex:

→ $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+3}$ $\qquad \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{\lim_{x\to 0}x^2+\lim_{x\to 0}1}{\lim_{x\to 0}x^2+\lim_{x\to 0}3}=\frac{1}{3}$

→ $g(x)=\frac{x^4}{x^2+\operatorname{sen}^2 x}$ $\qquad \lim_{x\to 0} g(x)$

## Princípio do enquadramento de funções

$x\in D \qquad f(x)\leq g(x)\leq h(x)$

$a\in \overline{D} \qquad \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=b$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x)=b$

$0\leq\frac{x^4}{x^2+\operatorname{sen}^2 x}\leq\frac{x^4}{x^2}=\underset{\substack{x^2\to 0\\x\to 0}}{x^2}$ $\qquad x^2+\operatorname{sen}^2 x\geq x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2+\operatorname{sen}^2 x}\leq\frac{1}{x^2}$

$\Downarrow$

$\lim_{x\to 0} g(x)=0$

ex:

→ $\lim_{x\to 0}\left(x^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{x}\right)$

$x\neq 0$

$-1\leq \operatorname{sen}(1/x)\leq 1,\ x\neq 0$

$0\leq x^2\operatorname{sen}^2(1/x)\leq x^2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(x^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$, pois $\lim_{x\to 0}x^2=0$

arc

# LIMITES RELATIVOS A SUBCONJUNTO E LIMITES LATERAIS

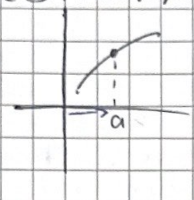
$f: D \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$, $A_1, A_2 \subset D$, $a \in \overline{A_1}$, $a \in \overline{A_2}$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A_1}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A_2}} f(x) \Rightarrow$ ñ existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

## limites laterais

$f(a^-) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, $f(a^+) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ $\quad x \in ]a, +\infty[ \cap D$

$x \in D \cap ]-\infty, a[$



Heaviside $\Rightarrow$ $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} H(x)$ ñ existe

$\lim\limits_{x \to 0^-} H(x) = 0 \neq \lim\limits_{x \to 0^+} H(x) = 1$

o $\varepsilon$ é muito pequeno

então $1/\varepsilon$ é o número

grande

## A reta real fechada

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty$

$a, b \in \mathbb{R}: \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ da função atrás definida

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $\quad V_\varepsilon(+\infty) = ]1/\varepsilon, +\infty[$

$V_\varepsilon(-\infty) = ]-\infty, -1/\varepsilon[$

$x \in V_\varepsilon(+\infty)$ é $x \in ]1/\varepsilon, +\infty[$

$x > 1/\varepsilon$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ $\quad \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_x (x \in D \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow \underbrace{f(x) > 1/\varepsilon}_{f(x) \in V_\varepsilon(+\infty)})$

ex:

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_x (\underbrace{x \in V_\delta(-\infty)}_{x < -1/\delta} \Rightarrow |e^x - 0| < \varepsilon)$ $\quad 0 \leq |\operatorname{sen} x| \leq 1$

$\underline{x > -1/\delta \Rightarrow e^x < \varepsilon}$

# Propriedades algébricas em $\mathbb{R}$

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$, $0^0$, $+\infty^0$, $1^\infty$ → indeterminações

$\frac{0}{0}$ $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ $\qquad$ $\frac{0}{0}$ $\frac{x^4}{x^2+\operatorname{sen}^2 x} \to 0$

## Previously in Cálculo 1...

03/10/2022

- Noção de limite

$f: D_f \to \mathbb{R}$

$a \in \overline{D_f}$ (aderência de $D_f$

$b \in \mathbb{R}$ $\qquad \overline{D}_f = \operatorname{int}(D_f) \cup \operatorname{Front}(D_f$

f tem limite b qd $x$ tende para a $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \overset{\text{definição}}{\Leftrightarrow} \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_x \left(x\in D_f \wedge \underbrace{|x-a|<\delta}_{x \in ]-\delta+a,\, a+\delta[ \;=\; V_\delta(a)} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-b|<\varepsilon}_{f(x)\in ]b-\varepsilon,\, b+\varepsilon[ \;=\; V_\varepsilon(b)}\right)$

- Propriedades algébricas de limites

$a \in \overline{D}$ $\quad \lim\limits_{x\to a} f(x) = c,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = c \pm b$

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = c.b$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{b},\ b\neq 0$$

ex:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh}(3x)}{x} = \frac{0}{0}^{\text{ind}}$$

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \lim_{x\to 0} \operatorname{senh}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{e^0-e^0}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1+1-e^{-3x}}{2x}$$

$$\underset{\text{prop. alg.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{2x} - \lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x}-1}{2x} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} + \lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x}-1}{-3x}\right) = 3$$

composição + limite notável $\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1\right)$

- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ reta fechada

$x \in \mathbb{R}$ $\qquad -\infty < x < +\infty$

$\pm\infty \pm\infty = \pm\infty$ $\qquad a>0 \quad a \pm \infty = \pm\infty$

$\qquad\qquad a<0 \quad a \pm \infty = \mp\infty$

indeterminações

$0.\infty$, $\infty-\infty$

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x)^{g(x)}$ $\quad D_f \geq 0 \quad D'_f \geq 0$ $\quad CD_f > 0$ contradomínio $\quad \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$

$x>0 \quad x = e^{\ln(x)}$

$e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\ln(f(x))}$

$0^0, \infty^0, 1^\infty$ -> indeterminações

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \underset{\in\mathbb{R}}{b} \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists k>0\ \forall \underset{x\in D_f}{x>k} \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$

$f(x) \in V_\varepsilon(b)$

$V_\delta(+\infty) = \left]\frac{1}{\delta}, +\infty\right[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

T.P.C.

# Continuidade

o limite é $+\infty$ quando a função em $\mathbb{R}$ não é majorada, o contradomínio não é majorado

Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$, $a \in D_f$

$f$ diz-se contínua em $a\in D_f$ sse $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\ (x\in D_f \wedge |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon)$

▸ $f$ diz-se contínua em $D_f$ sse $\forall a\in D_f$ $f$ é uma função contínua em $a$.

$f, g$ são funções contínuas em $a \in D = D_f \cap D_g$

$f \pm g$, $f.g$ são funções contínuas em $A$

## Propriedades locais

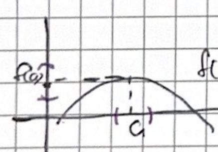
Seja $f$ contínua em $a\in D_f$ e $f(a)>0$ então existe $V_\delta(a)$, onde $f(x)>0$ $x\in V_\delta(a)$ :)

$f$ contínua em $A$

$\forall \underset{f(a)}{\varepsilon}>0\ \exists \delta>0\ x\in V_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(f(a))$

$|f(x)-f(a)|<\varepsilon \qquad f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon \qquad x \in V_\delta(a)$

escolhendo $\varepsilon = f(a) > 0$




$f(x)>0$

$\Rightarrow f(x) > f(a) - f(a) = 0$

$f(x) > 0$

## Prolongamento por continuidade

Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$, $a \notin D_f$, $a \in \overline{D_f}$

Diz-se que $f$ é prolongável por continuidade a $a$ se existir $F: D_f \cup \{a\} \to \mathbb{R}$

tal que $F(x) = \begin{cases} f(x) & x\in D_f \\ \lim_{x\to a} f(x) & x = a \end{cases}$

f é prolongável por continuidade a $a$ sse existir em $\mathbb{R}$ $\lim_{x\to a} f(x) = b$

ex:

Seja $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

Verifique se f é prolongável por continuidade a 0.

$\lim_{x\to 0} f(x) = ?$ , $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0^+}{1+e^{+\infty}} = 0$

$\frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{1+e^{1/x}} = \frac{0^-}{1+e^{-\infty}} = \frac{0^-}{1+0^+} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

existe $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e a função f é prolongável por continuidade

a 0 e $F(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow$ F é contínua em $\mathbb{R}$

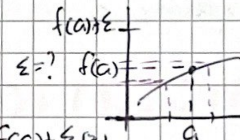
# Continuidade local

10/10/2022

$f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f contínua em $a \in D_f$ $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f$ e $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$

e $f(a) > 0 \Rightarrow$ existe $V_\delta(a)$, $f(x) > 0$, $x \in V_\delta(a)$




Demonstração

pela definição de continuidade de f em a, escolhendo

$\varepsilon = f(a) > 0$ existe $\delta > 0$ $\forall x \in D_f \cap V_\delta(a) \Rightarrow f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$ $(\Leftrightarrow)$

$(\Leftrightarrow)$ $\underbrace{f(a)-f(a)}_{0} < f(x) < 2f(a) \Rightarrow x \in V_\delta(a) \cap D_f$ $f(x) > 0$

$\varepsilon = f(a) > 0$

ex:

Uma função limitada que não tem máximo, nem mínimo absoluto

$f(x) = \arctan(x)$ , $f(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

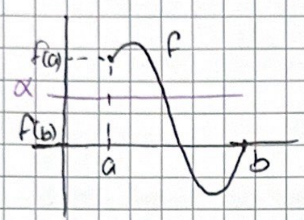
$f(\mathbb{R})$ é um conjunto majorado e minorado logo tem supremo e ínfimo ($\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$ respetivamente)

# Continuidade global

Seja $I=[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ ($I$ é um intervalo fechado e limitado)

## Teorema de Bolzano

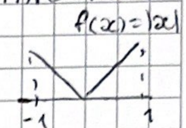
Seja $f$ contínua em $[a,b]$ e $f(a) \neq f(b)$ então para qualquer $\alpha$ entre $f(a)$ e $f(b)$ existe $c \in ]a,b[$ tal que $\alpha = f(c)$.




em geral $f([a,b]) \neq [f(a), f(b)]$

em particular se $f$ contínua e monótona crescente em $[a,b]$

$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$




$[f(-1), f(1)] = \{1\}$

## Teorema da limitação

$f$ é contínua num intervalo fechado e limitado $[a,b]$ então $f$ é limitada.

Diz-se que $f$ tem máximo (resp. mínimo: se existir $x_m \in D_f : f(x) \geq f(x_m)$) se existir: $x_M \in D_f$ tal que $f(x) \leq f(x_M) \cdot \forall x \in D_f$

**Nota:** Neste caso diz que $f$ tem supremo e ínfimo (existem $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$, $\inf_{x\in[a,b]} f(x)$)

## Teorema de Weierstrass

Toda a função contínua num intervalo fechado e limitado $[a,b]$ tem máximo e mínimo.

**Nota:** $f$ é contínua em $[a,b] \Rightarrow f([a,b])$ é um intervalo fechado e limitado

# Corolários

Corolário do teorema de Bolzano

1. $f$ contínua em $[a,b]$ (int. fechado e limitado) e $f(a)f(b)<0$ então existe $c \in ]a,b[$ $f(c)=0$

2. $f(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$ então $f(x)$ não muda de sinal.

**exercício:**

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$, $\alpha<\beta$ então

1. $f$ tem pelo menos 1 ponto fixo (ex. $c \in D_f$ $f(c)=c$)
2. $f$ é limitada
3. $]\alpha, \beta[ \subset f(\mathbb{R})$
4. se $\alpha . \beta < 0$ então $g(x) = \dfrac{1}{1+f^2(x)}$ tem máximo absoluto

resolução:

① Seja $h(x) = f(x) - x$ pretende-se provar que $h$ tem pelo menos 1 zero.
$h$ é contínua em $\mathbb{R}$ pois resulta da adição de funções contínuas

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \beta - \infty = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \alpha + \infty = +\infty$

$\Rightarrow$ existe $a$, $h(a) > 0$ e analogamente existe $b$, $h(b) < 0$

$h$ é contínua em $\mathbb{R}$, é contínua em $[a,b]$

$\Rightarrow$ existe $c \in ]a,b[$ $\quad h(c) = 0 \quad f(c) = c \qquad\qquad h(a).h(b) < 0$

② $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists L > 0 \ \forall x > L \quad f(x) \in V_\varepsilon(\beta)$

fixando $\varepsilon > 0 \quad \beta - \varepsilon < f(x) < \beta + \varepsilon, \forall x \in ]L, +\infty[ \qquad \boxed{L = \frac{1}{\delta}}$

$\Rightarrow f(]L, +\infty[)$ é um conjunto limitado

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$

dado $\varepsilon > 0 \quad \exists k > 0 \quad x < -k \quad \alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$

$\Rightarrow f(]-\infty, -k[)$ é um conjunto limitado

$f$ é contínua em $[-k, L]$ logo ($[-k, L]$ intervalo fechado e limitado)
$f([-k, L])$ é limitado

$\Rightarrow f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, -k[) \cup f([-k, L]) \cup f(]L, +\infty[)$ é limitado

④ $g(x) = \frac{1}{1 + f^2(x)} \qquad g$ é limitada $\quad 0 < g(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad g(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

· $\alpha < 0$, $\beta > 0$ $\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) > 0 \Rightarrow b \in ]L, +\infty[ \quad f(b) > 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) < 0 \Rightarrow a \in ]-\infty, -k[ \quad f(a) < 0$

$f$ contínua em $[a,b]$ e $f(a).f(b) < 0$

$\Rightarrow$ existe $c \in ]a,b[ \quad f(c) = 0 \Rightarrow g(c) = \frac{1}{1 + f^2(c)} = 1 = \max(g)$

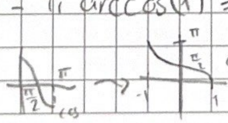
# Problemas

12/10/2022

Ex. capitulo 2:

9) a) $\lim_{x \to 0^+} \pi \arccos(1-x) = \pi \arccos(1) = \pi . 0 = 0$

$\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$




→ falta fazer b), f), h), i)

c) $\lim_{x\to 0} \operatorname{arcsen}(x) . \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

Usar enquadramento

$f(x) \le g(x) \le h(x) \quad x \in D, \ a \in \bar{D}$

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\lim_{x\to a} g(x) = b$

$\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x^2}$ ñ existe $\Rightarrow \left|\cos\frac{1}{x^2}\right| \le 1$

$\lim_{x\to 0} \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} 0 = 0$

$\underbrace{0}_{f(x)} \le \underbrace{\left|\operatorname{arcsen} x . \cos\frac{1}{x^2}\right|}_{g(x)} \le |\operatorname{arcsen} x| \left|\cos\frac{1}{x^2}\right| \le \underbrace{|\operatorname{arcsen} x| . 1}_{h(x)}$, como $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0$

pq o módulo é sempre maior ou igual a zero $\Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = 0$

d) $\lim_{x\to -1^+} \frac{sen^2(\arccos x)}{1+x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to -1^+} \frac{1-\cos^2(\arccos x)}{1+x} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1-x^2}{1+x} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(1-x)\cancel{(1+x)}}{\cancel{1+x}} =$

$= 1+1 = 2$

e) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to -2} \frac{(x^2-2x+4)\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}} = -3$

$x^2-2x+4 = \frac{x^3+8}{x+2}$

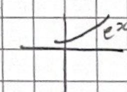
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 8 |
| -2 | | -2 | 4 | -8 |
| | 1 | -2 | 4 | 0 |

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\arctan(x)+\pi)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(\arctan(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} =$

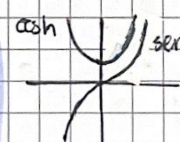
$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \begin{cases} +\infty, & x>0 \\ -\infty, & x<0 \end{cases}$ ñ existe limite em $\bar{\mathbb{R}}$

$\tan(\alpha+\pi) = \tan(\alpha)$

11) e) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1+senh^2(x)}{\cosh(x)} \overset{*}{=} \lim_{x\to -\infty} \underbrace{\cosh(x)}_{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)} = +\infty$ em $\bar{\mathbb{R}}$, $\frac{e^{-\infty}+e^{+\infty}}{2} = \frac{0+\infty}{2} = +\infty$




$$\boxed{\begin{gathered} \cosh^2(x) - senh^2(x) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = 1 \end{gathered}}$$




g) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^2}\, sen\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{y^2}}\, sen\, y = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\sqrt[3]{y^2}} \cdot \lim_{y\to 0^+} \frac{sen\, y}{y} = 0 . 1 = 0$

$\boxed{\lim_{y\to 0} \frac{sen\, y}{y} = 1}$

$x = \frac{1}{y}, \ y \to 0^+$

$\lim_{y\to 0} \sqrt[3]{y}$

$y^{1-\frac{2}{3}} = y^{\frac{1}{3}}$

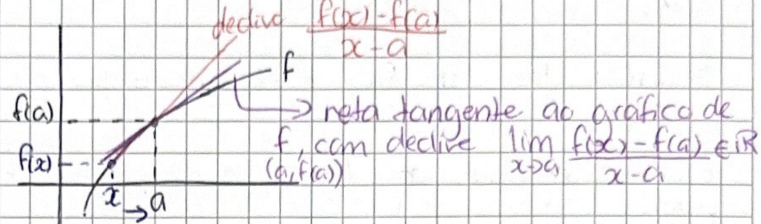
# Heine

12/10/2022

$f: D_f \to \mathbb{R}$, $a \in D_f$, f é contínua em a à Heine sse $\forall x_n \in D_f \ x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

NOTA:
A continuidade à Heine é equivalente à continuidade à Cauchy.
Como aplicação:
seja $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, mostremos q̃ ñ existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, seja $x_n = \frac{1}{n\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
e $f(x_n) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$
$\operatorname{sen}(n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$
$f(y_n) = 1 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

NOTA:
se a função f é diferenciável e $a \in \operatorname{int}(D_f)$ a equação da reta tangente ao gráfico é $y = f(a) + f'(a)(x-a)$



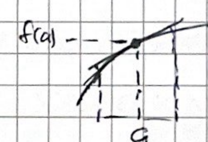

# Diferenciável

Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} D_f$.
Diz-se que f é diferenciável em a sse $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$ e designa-se por $f'(a)$ a derivada da função f sendo $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = R_1(x)$ , $\frac{R_1(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$

infinitésimo de ordem superior a 1

$$\lim_{x\to a} \frac{R_1(x)}{x-a} = 0$$




• $f(x) = e^x$, definir a função $f'(x)$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h=x-a}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{a+h}-e^a}{h} = e^a\left(\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}\right) =$$

$= e^a \cdot 1$

$$f'(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

$g(x) = e^x - 1$ , $g(0) = 0$

$y = g(0) + g'(0)x$ equação reta em $(0, g(0))$

$y = x$

## Relação entre diferenciabilidade e continuidade

**Teorema:**
Sendo f diferenciável em $a \in \operatorname{int} D_f$ então f é contínua em a.

→ Exemplo de uma função contínua, mas não diferenciável em a

$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ , f ñ é diferenciável em zero pois

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$

O limite $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ é designado por derivada de f à direita de zero

e a representamos por $f'_d(0)$ analogamente $f'_e(0)$ designa a derivada lateral esquerda de f

Como $f'_d(0) \neq f'_e(0)$, f não é diferenciável.

(1) Designamos o teorema como a condição necessária para que a função seja diferenciável.

Dem:

Sendo f diferenciável em a pretendemos mostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Seja $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, $g \in D_f \setminus \{a\}$, mas existe $\lim_{x \to a} g(x) = f'(a) \in \mathbb{R}$

$f(x) = f(a) + g(x)(x - a)$

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a)$

Operações com funções diferenciáveis

- $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in \text{int } D$, f e g diferenciáveis em $a \in \text{int } D$ então $f \pm g$, $f/g$, $f \cdot g$ são também diferenciáveis em $a \in \text{int } D$ e $g(a) \neq 0$
- $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a) g(a) + f(a) g'(a)$
- $(f/g)'(a) = \frac{f'(a) g(a) - f(a) g'(a)}{g^2(a)}$

ex:

Seja $f(x) = \text{senh}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ $\quad \text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

a função f resulta da soma e produto e composição de funções elementares logo diferenciável
f é também diferenciável

$(\text{senh}(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) = \frac{1}{2}\left(e^x - (-e^{x})\right) =$

$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$ $\quad (\cosh(x))' = \text{senh}(x)$

## Composição de funções diferenciáveis

$f$ diferenciável em $b$ e $g$ diferenciável em $a \in D_g$ tal que $b = g(a)$
então $f \circ g$ é diferenciável em $a$ e

$$(f \circ g)'(a) = (f(g(a)))' = g'(a) \cdot f'(g(a))$$

## Diferenciabilidade da função inversa

Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$, $f$ contínua e injetiva e seja $g: f(D_f) \to D_f$ a função inversa de $f$.
$f^{-1}$
Se $f$ for diferenciável e $a \in D_f$, $f'(a) \neq 0$, então $g$ é também diferenciável em $b = f(a)$ e $\quad g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$

ex:

Seja $f(x) = \operatorname{sen} x \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$y = f(x)$, $x = g(y)$, $y = ]-1,1[$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

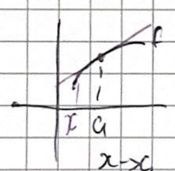
$$(\operatorname{arcsen} y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad y \in ]-1,1[$$

## Previously in Cálculo...

17/10/2022

ficha3 até teore mas de e Lagrange ñ incluído

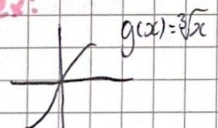
$f$ diz-se diferencial em $a \in \operatorname{int}(D_f)$ sse existir $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{R}$




reta tangente ao gráfico de $f$ em $x = a$

Como definir $f'(x)$?
Sabendo o domínio da diferenciabilidade de $f$, $D_f$. (*)

ex:




$D_g = \mathbb{R} \qquad g'(x)$ existe $x \neq 0$

$x = 0$ é uma reta tangente ao gráfico de $f$

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

(*) $f': D_f \to \mathbb{R}$

$f'(x) = (f(x))'$

## Relações algébricas com derivadas:

$u, v$, $u$ e $v$ diferenciáveis $int(D)$

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $(u/v)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$

## Expressões para as derivadas das funções elementares incluindo a composição com $u(x)$ que abreviamos pa $u$

- $(\text{sen}(u))' = u' \cos(u)$
- $(e^u)' = u' e^u$
- $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$
- $(u^p)' = u' p u^{p-1}$

Seja $f(x) > 0$

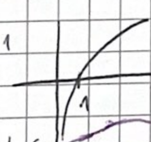
$$\boxed{(f(x))^{g(x)}} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\ln(f(x))}$$

$x > 0$, $x = e^{\ln(x)}$

Ex:

$h(x) = (\ln(x+1))^x \qquad D_h = \mathbb{R}^+$

$\ln(x+1) > 0 = \ln 1$



$x > 0$

$\Rightarrow x + 1 > 1$
$x > 0$

$$h'(x) = ((\ln(x+1))^x)' = \left(e^{\ln((\ln(x+1))^x)}\right)' = (x\ln(\ln(x+1)))' \, e^{\ln((\ln(x+1))^x)} =$$

$$= \left(x' \ln(\ln(x+1)) + x\frac{(\ln(x+1))'}{\ln(x+1)}\right)(\ln(x+1))^x = \left[\ln(\ln(x+1)) + \frac{x}{\ln(x+1)} \cdot \frac{1}{x+1}\right](\ln(x+1))^x =$$

$$\overset{*}{=} \left[\ln(\ln(x+1)) + \frac{x}{(x+1)\ln(x+1)}\right](\ln(x+1))^x$$

$h': \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
$h'(x) = *$

Seja $f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injetiva, diferenciável tal que $g(1) = 4$, $g'(1) = 3$ e $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Considere $h(x) = f(g(x))$

1) Justifique que h é diferenciável em 1 e determine $h'(1)$

2) Justifique que h é injetiva e que a função inversa de h, $h^{-1}$, é diferenciável em $\ln 3 = h(1)$. Calcule $(h^{-1})'(\ln 3)$.

① Derivada da função composta $\qquad a \in D_g \quad g(a) = b \in D_f$

Sendo g diferenciável em a e f é diferenciável e b, sendo $h = f \circ g$ então h é diferenciável em a e $h'(a) = (f(g(a)))' = g'(a) f'(b)$

1) $D_f = \mathbb{R}_0^+$, f é diferenciável e $D_f$ pois resulta da soma e composição de funções elementares logo diferenciáveis

g é diferenciável em $\mathbb{R}$, existe $g'(1) = 3$ $\quad \Rightarrow$ f é diferenciável em 3

$g(1) = 4 > 0$

$\Rightarrow h = f \circ g$ é diferenciável em 1, do teorema da composição

e $\boxed{h'(1) = (f(g(1)))' = g'(1) f'(g(1)) = 3 f'(4) = \frac{1}{4}}$

$f'(x) = (\ln(1+\sqrt{x}))' = \frac{(1+\sqrt{x})'}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ $\qquad x = 4 \qquad f'(4) = \frac{1}{12}$

$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})'$

2) f é estritamente crescente logo é injetiva, g é injetiva

$\Rightarrow$ h é injetiva e contínua, h é diferenciável em 1

$h(1) = \ln 3$ então a função inversa $h^{-1}$ é diferenciável em $h(1) = \ln 3$

$h^{-1} : h(D_h) \to D_h$

usamos o teorema da inversa

$(h^{-1})'(\ln 3) = \frac{1}{h'(1)} = 4$

ex:

$y = f(x) = \tan(x) \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

estritamente crescente existe $f^{-1}(y)$, $y \in \mathbb{R} = f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$

f diferenciável em $x \Rightarrow f^{-1}$ diferenciável em $f(x)$

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$ $\qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos x}$

$(\arctan(y))' = \frac{1}{1+y^2}$, $y \in \mathbb{R}$ $\qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$

$(\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$ $\qquad (\arcsin(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\arccos(u))' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

# Problemas

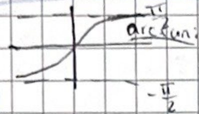
19/11/2021

Seja $f(x) = |x| \arctan(x^2)$

Defina a função derivada, $f'$, de $f$.

Res:

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$,



$\arctan: \mathbb{R} \to ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

limitada ($f(\mathbb{R})$ é um conjunto limitado)

é contínua

estritamente crescente

Domínio de diferenciabilidade da função $f$, $D_1 \subset \text{Dom } f$

$$f(x) = \begin{cases} x\arctan(x^2) & x \geq 0 \\ -x\arctan(x^2) & x \leq 0 \end{cases}$$

$x > 0$, $f$ resulta da composição e produto de funções diferenciáveis (elementares) logo $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$

$x < 0$, pelas mesmas razões $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}^-$

$x = 0$ $\quad f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x\arctan(x^2) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \arctan(x^2) = 0$

$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \arctan(x^2) = \arctan(0) = 0$$

Concluímos que existem em $\mathbb{R}$ $f'_d(0), f'_e(0)$ e $f'_d(0) = f'_e(0) \Rightarrow f$ é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$

$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$

se existirem limites é contínua no ponto logo derivada mas o contrário não se pode aplicar (pode não ser contínua não ser diferenciável)

ex:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$g'(0) = 0$ $\quad \lim_{x\to 0} g'(x)$ ñ existe

Expressões para as derivadas das funções elementares com a composição por $u(x)$ a qual abreviamos por $u$

$(\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$ $\qquad (\operatorname{sen}(u))' = u' \cos(u)$

$f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} \arctan(x^2) + \frac{2x^2}{1+x^4} & x \geq 0 \\ -\left(\arctan(x^2) + \frac{2x^2}{1+x^4}\right) & \end{cases}$$

$g'(x) = (x^2)' \operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^2 \left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)' =$

$= 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{(-x)' \arctan(x^2) - (-x)(\arctan(x^2))'}{\arctan^2(x^2)}$

ñ existe $\lim_{x\to 0} g'(x)$