CDI 1 - TP **4o. MiniTeste** **LETI** **26/01/2022**

Justifique as suas respostas

ESBOÇO DE RESOLUÇÃO:

1. (**6 vals.**) Primitive a função: $\dfrac{1}{\sin x \cos^2 x}$

$$\mathbf{P}\,\frac{1}{\sin x\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x}\tan x - \mathbf{P}\left((\sin x)^{-1}\right)' \tan x =$$
$$= \sec x \tan x - \mathbf{P}\left((-1)(\sin x)^{-2}\cos x\right)\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x\tan x + \mathbf{P}\,\frac{1}{\sin x} =$$
$$= \sec x\tan x + \mathbf{P}\ \sec x\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x} = \sec x\tan x + \log(\sec x+\tan x)+c$$

2. (**6 vals.**) Considere $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{K\log x} e^{-t^2}dt$. Determine o valor da constante K tal que $f'(1) = 0$.

Dado $a \in \mathbf{R}$, seja $F(y) = \displaystyle\int_a^y e^{-t^2}dt$, que é uma função diferenciável, pelo Teorema Fundamental da Análise, já que $g(t) = e^{-t^2}$ é uma função contínua. Então,

$$f(x) = \int_{x^2}^{K\log x} e^{-t^2}dt = \int_{x^2}^{a} e^{-t^2}dt + \int_{a}^{K\log x} e^{-t^2}dt = -\int_{a}^{x^2} e^{-t^2}dt + \int_{a}^{K\log x} e^{-t^2}dt =$$
$$= -F(x^2) + F(K\log x)$$

que é uma função diferenciável já que é a diferença das compostas de funções diferenciáveis (F com $h(x) = x^2$ e F com $j(x) = K\log x$). Portanto,

$$f'(x) = \Big(-F(x^2) + F(K\log x)\Big)' = -F'(x^2)\cdot 2x + F'(K\log x)\cdot K\frac{1}{x} =$$
$$= -e^{-(x^2)^2}\cdot 2x + e^{-(K\log x)^2}\cdot K\frac{1}{x}$$

donde

$$0 = f'(1) = -e^{-(1^2)^2}\cdot 2\cdot 1 + e^{-(K\log 1)^2}\cdot K\frac{1}{1} = -\frac{2}{e} + e^0\cdot\frac{K}{1} \qquad \Longrightarrow \qquad K = \frac{2}{e}$$

3. (**8 vals.**) Determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{n!+1}$.

$$\frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!+1}}{\frac{n^3}{n!+1}} = \frac{n!+1}{(n+1)!+1}\cdot\frac{(n+1)^3}{n^3} = \frac{(n!+1)/n!}{((n+1)!+1)/n!}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 =$$
$$= \frac{1+1/n!}{(n+1)+1/n!}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\cdot 1 = 0 < 1$$

Portanto, pelo critério de d'Alembert, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{n!+1}$ coverge.