CDI 1 - TP **4o. MiniTeste** **LEGI** **25/01/2022**

Justifique as suas respostas

ESBOÇO DE RESOLUÇÃO:

1. (**6 vals.**) Primitive a função: $\dfrac{\sin^3 x}{2-\sin^2 x}$

$$\mathbf{P}\frac{\sin^3 x}{2-\sin^2 x} = \mathbf{P}\sin x\cdot\frac{\sin^2 x}{2-\sin^2 x} = \mathbf{P}\sin x\cdot\frac{1-\cos^2 x}{2-1+\cos^2 x} = \int dx \sin x\cdot\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$$
$$\left(\begin{array}{c} t=\cos x \\ dt = -\sin x dx\end{array}\right) = \int(-dt)\frac{1-t^2}{1+t^2} = \int dt\frac{(t^2+1)-2}{1+t^2} = \int dt - 2\int dt\frac{1}{1+t^2} =$$
$$= t - 2\arctan t + c = \cos x - 2\arctan(\cos x) + c$$

ou

$$\mathbf{P}\frac{\sin^3 x}{2-\sin^2 x} = \mathbf{P}\sin x\cdot\frac{\sin^2 x}{2-\sin^2 x} = \mathbf{P}\sin x\cdot\frac{1-\cos^2 x}{2-1+\cos^2 x} = \mathbf{P}\sin x\cdot\frac{2-(1+\cos^2 x)}{1+\cos^2 x} =$$
$$\mathbf{P}\sin x\cdot\frac{2}{1+\cos^2 x} - \mathbf{P}\sin x = -2\arctan(\cos x) + \cos x + c$$

2. (**6 vals.**) Seja f uma função contínua e $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$ para cada $x\in\mathbf{R}$. Mostre que f é ímpar.

Sendo f contínua, então $F(x) = \int_0^x f$ é função diferenciável pelo Teorema Fundamental da Análise bem como a função $F(-x) = \int_0^{-x} f$. Assim, a igualdade de funções

$$0 = \left(\int_{-x}^{x} f(t)dt = \right)\int_0^x f(t)dt - \int_0^{-x} f(t)dt$$

implica a igualdade das suas derivadas:

$$0 = f(x) - f(-x)\cdot(-1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = -f(x), \qquad \text{para cada } x\in\mathbf{R}.$$

Portanto, f é função ímpar.

3. (**8 vals.**) Determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n!}$.

Tem-se,

$$\frac{\frac{n+1+1}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1+2/n}{1+1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\cdot\frac{1+0}{1+0} = 0 < 1.$$

Então, pelo critério de d'Alembert, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n!}$ converge.