CDI 1 - TP **3o. MiniTeste** **LETI** **15/12/2021**
Justifique as suas respostas

ESBOÇO DE RESOLUÇÃO:

1. (7 vals.) Sejam $a, b \in \mathbf{R}^+$. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} \left(= \frac{0}{0} \right)$$

Após justificar que pode usar a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(a^x - b^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x(\log a) - b^x(\log b)}{1} = a^0(\log a) - b^0(\log b) = \log(a/b)$$

donde:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \log(a/b)$$

2. (7 vals.) Mostre que $\tan(x) > x$, para qualquer $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Sugestão: Lagrange.

Seja $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ e $f(t) = \tan(t)$ em $[0, x]$; justifique que f está nas condições do Teorema de Lagrange sobre $[0, x]$. Esse Teorema aplicado a esta f e a este intervalo implica a existência de $c_x \in]0, x[$ tal que

$$\frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = \frac{1}{\cos^2(c_x)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\tan(x)}{x} = \frac{1}{\cos^2(c_x)}$$

Por outro lado, $c_x \in]0, x[\subset]0, \frac{\pi}{2}[$ implica que

$$0 < \cos(c_x) < 1 \implies 0 < \cos^2(c_x) < 1 \implies \cos^2(c_x) > 1 \implies \frac{\tan(x)}{x} > 1 \implies$$
$$\implies \tan(x) > x$$

3. (6 vals.) Considere a função $f(x) = x$ para $x \in \mathbf{Q}$ e $f(x) = 0$ para $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, num intervalo $[a, b]$ com $0 < a < b \in \mathbf{R}$. Escreva as somas de Darboux, inferior e superior, desta função, para uma decomposição d, qualquer, de $[a, b]$. Simplifique-as o mais possível. Calcule os integrais inferior e superior de f sobre $[a, b]$ (note que já sabe integrar a função identidade!). Decida se f é ou não integrável sobre $[a, b]$.

Seja d uma decomposição de $[a, b]$:

$$d = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

Tem-se:

$$s_d(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$$

$$S_d(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s_d(f) \; : \; \text{d é decomposição de } [a,b]\} = \sup\{0\} = 0.$$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S_d(f) \; : \; \text{d é decomp. de } [a,b]\} = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} x_k(x_k - x_{k-1}) \; : \; \text{d é dec. de } [a,b]\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} M_k(Id)(x_k - x_{k-1}) \; : \; \text{d é decomp. de } [a,b]\right\} = \inf\{S_d(Id) \; : \; \text{d é dec. de } [a,b]\} =$$

$$= \overline{\int_a^b} Id = \int_a^b Id = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

onde Id designa a função identidade:

$$Id(x) = x$$

e usamos o facto, estabelecido nas teóricas, que Id é integrável num intervalo $[a,b]$ com

$$\int_a^b Id = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Finalmente,

$$\underline{\int_a^b} f = 0 \neq \frac{b^2 - a^2}{2} = \overline{\int_a^b} f$$

e portanto f não é integrável em $[a,b]$.