CDI 1 - TP **3o. MiniTeste** **LEGI** **14/12/2021**
Justifique as respostas

ESBOÇO DE RESOLUÇÃO:

1. (7 vals.) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \sin(e^{-x^2})$.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \sin(e^{-x^2}) = \lim_{x\to+\infty} e^x \cdot e^{-x^2} \cdot \frac{\sin(e^{-x^2})}{e^{-x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2+x} \cdot \frac{\sin(e^{-x^2})}{e^{-x^2}} = 0 \cdot 1 = 0$$

onde, na penúltima igualdade fizemos uso de um "limite notável" bem conhecido.

2. (7 vals.) Mostre que $\dfrac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$, para qualquer $x > 0$.
Sugestão: Aplicar Teorema de Lagrange à função $\log(1+t)$ e a um intervalo apropriado.

Seja $x > 0$ e considere $f(t) = \log(1+t)$ em $[0, x]$; justifique que f está nas condições do Teorema de Lagrange sobre $[0, x]$. Esse Teorema aplicado a esta f e a este intervalo implica a existência de $c_x \in]0, x[$ tal que

$$\frac{\log(1+x) - \log(1+0)}{x-0} = \frac{1}{1+c_x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c_x}$$

Por outro lado, $c_x \in]0, x[$ implica que

$$0 < c_x < x \quad \Longrightarrow \quad 1+0 < 1+c_x < 1+x \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c_x} < \frac{1}{1} \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{1+x} < \frac{\log(1+x)}{x} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$$

3. (6 vals.) Considere a função $f(x) = x$ para $x \in \mathbf{Q}$ e $f(x) = 0$ para $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, num intervalo $[a, b]$ com $0 < a < b \in \mathbf{R}$. Escreva as somas de Darboux, inferior e superior, desta função, para uma decomposição d, qualquer, de $[a, b]$. Simplifique-as o mais possível. Calcule os integrais inferior e superior de f sobre $[a, b]$ (note que já sabe integrar a função identidade!). Decida se f é ou não integrável sobre $[a, b]$.

Seja d uma decomposição de $[a, b]$:

$$d = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

Tem-se:

$$s_d(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$$

$$S_d(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s_d(f) \ : \ \text{d é decomposição de } [a,b]\} = \sup\{0\} = 0.$$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S_d(f) \ : \ \text{d é decomp. de } [a,b]\} = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} x_k(x_k - x_{k-1}) \ : \ \text{d é dec. de } [a,b]\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} M_k(Id)(x_k - x_{k-1}) \ : \ \text{d é decomp. de } [a,b]\right\} = \inf\{S_d(Id) \ : \ \text{d é dec. de } [a,b]\} =$$

$$= \overline{\int_a^b} Id = \int_a^b Id = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

onde Id designa a função identidade:

$$Id(x) = x$$

e usamos o facto, estabelecido nas teóricas, que Id é integrável num intervalo $[a,b]$ com

$$\int_a^b Id = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Finalmente,

$$\underline{\int_a^b} f = 0 \neq \frac{b^2 - a^2}{2} = \overline{\int_a^b} f$$

e portanto f não é integrável em $[a,b]$.