CDI 1 - TP **2o. MiniTeste** **LETI** **10/11/2021**

Justifique as suas respostas

1. (7 vals.) Calcule, se existir,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\big(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\big) \qquad \text{onde } a \text{ é um parâmetro real.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\big(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\big) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\frac{\big(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\big)\cdot\big(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\big)}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\frac{x+a-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = a\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+a}{x}}+1} =$$
$$= a\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1} = a\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{a}{2}$$

2. (6 vals.) Seja f uma função contínua em $\mathbf{R}$ e existem $b_1, b_2 \in \mathbf{R}$ tais que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b_1$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b_2$. Mostre que f é limitada.

   Seja $\epsilon > 0$. Já que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b_1$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b_2$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\Big(x > 1/\delta_1 \Longrightarrow |f(x)-b_1| < \epsilon\Big) \text{ e } \Big(x < -1/\delta_2 \Longrightarrow |f(x)-b_2| < \epsilon\Big)$$

   Portanto, para $x > 1/\delta_1$, $b_1-\epsilon < f(x) < b_1+\epsilon$ e para $x < -1/\delta_2$, $b_2-\epsilon < f(x) < b_2+\epsilon$. Isto é, f é limitada sobre $]-\infty, -1/\delta_2[$ e sobre $]1/\delta_1, +\infty[$.

   Após justificar que f satisfaz as condições do Teorema de Weierstrass sobre o intervalo $[-\frac{1}{\delta_2}, \frac{1}{\delta_1}]$, aplique esse Teorema de Weierstrass à f e ao intervalo. Então f tem máximo e mínimo sobre esse intervalo. Isto implica que existe $M > 0$ tal que, para qualquer $x \in [-\frac{1}{\delta_2}, \frac{1}{\delta_1}]$, $-M \leq f(x) \leq M$. Por outras palavras, f é limitada sobre $[-1/\delta_2, 1/\delta_1]$.

   Como já tínhamos visto que f também é limitada sobre $]-\infty, -1/\delta_2[$ e sobre $]1/\delta_1, +\infty[$ então f é limitada (sobre $\mathbf{R}$).

3. (7 vals.) Justifique onde é diferenciável e calcule a função derivada de: $f(x) = \cos^3\left(\frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\right)$

$$f(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$$

   com

$$f_1(x) = \frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)} \qquad f_2(y) = \cos(y) \qquad f_3(t) = t^3$$

   Após justificar onde f é diferenciável (que é em $\mathbf{R}$),

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\cos^3\left(\frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\right)\right)' = 3\cos^2\left(\frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\right)\right)' = \\
&= 3\cos^2\left(\frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\right)\right)\cdot\left(\frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\right)' = \\
&= -3\cos^2\left(\frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\right)\cdot\sin\left(\frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\right)\cdot \\
&\qquad\cdot\frac{(1+\cos^2(x))'(1+\sin^2(x))-(1+\cos^2(x))(1+\sin^2(x))'}{(1+\sin^2(x))^2} = \\
&= -3\cos^2\left(\frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\right)\cdot\sin\left(\frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\right)\cdot \\
&\qquad\cdot\frac{(2\cos(x)(-\sin(x)))(1+\sin^2(x))-(1+\cos^2(x))(2\sin(x)\cos(x))}{(1+\sin^2(x))^2} = \\
&= -3\cos^2\left(\frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\right)\cdot\sin\left(\frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\right)\cdot \\
&\qquad\cdot(-1)\frac{(2\sin(x)\cos(x)(1+\sin^2(x)+1+\cos^2(x))}{(1+\sin^2(x))^2} = \\
&= 18\cos^2\left(\frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\right)\cdot\sin\left(\frac{1+\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\right)\cdot\frac{(\sin(x)\cos(x)}{(1+\sin^2(x))^2}
\end{aligned}
$$