CDI 1 - TP **2o. MiniTeste** **LEGI** **09/11/2021**
Justifique as suas respostas

ESBOÇO DE RESOLUÇÃO

1. Calcule, se existir,
$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\frac{\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\left(1+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{1+\cos\left(\frac{1}{x}\right)} =$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^2\frac{1-\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\cos\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{1+\cos\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\left(\frac{1}{x}\right)} =$$
$$= 1\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$
onde na penúltima igualdade fizemos uso de um "limite notável" bem conhecido.

2. Seja f uma função contínua num intervalo fechado e limitado $[a,b]$, tal que $f([a,b]) \subset [a,b]$. Mostre que f tem um ponto fixo em $[a,b]$.

   Seja $g(x) = f(x) - x$ para cada $x \in [a,b]$. g é uma função contínua uma vez que é a diferença de f (função contínua) e a função identidade (que também é função contínua). Como $f([a,b]) \subset [a,b]$ então para cada $x \in [a,b]$, $a \leq f(x) \leq b$. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ então o problema está resolvido. Suponhamos então que $f(a) \neq a$ e que $f(b) \neq b$ ou seja $a < f(a)$ e $f(b) < b$, donde $g(a) = f(a) - a > 0$ e $g(b) = f(b) - b < 0$. Então pelo Corolário do Teorema do Valor Intermédio, existe $c \in]a,b[$ tal que $0 = g(c) = f(c) - c$ isto é, $f(c) = c$.

3. Justifique onde é diferenciável e calcule a função derivada de: $f(x) = \cos(\sin(\cos(\sin x)))$

$$f(x) = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$$

   onde

$$f_1(x) = \sin(x) \qquad f_2(y) = \cos(y) \qquad f_3(z) = \sin(z) \qquad f_4(w) = \cos(w)$$

   Após justificar onde f é diferenciável (que é em $\mathbf{R}$),

$$f'(x) = (\cos(\sin(\cos(\sin(x)))))' = (-\sin(\sin(\cos(\sin(x))))) \cdot (\sin(\cos(\sin(x))))' =$$
$$= -\sin(\sin(\cos(\sin(x)))) \cdot (\cos(\cos(\sin(x)))) \cdot (\cos(\sin(x)))' =$$
$$= -\sin(\sin(\cos(\sin(x)))) \cdot (\cos(\cos(\sin(x)))) \cdot (-\sin(\sin(x))) \cdot (\cos(x)) =$$
$$= \sin(\sin(\cos(\sin(x)))) \cdot (\cos(\cos(\sin(x)))) \cdot \sin(\sin(x)) \cdot \cos(x)$$