CDI 1 - TP **2o. MiniTeste** **LEE** **11/11/2021**
Justifique as suas respostas

ESBOÇO DE RESOLUÇÃO

1. Calcule, se existir,
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+x}}-x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+x}}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+x}}+x\right)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+x}}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sqrt{x^2+x}-x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+x}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+x}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+1/x)}}{\sqrt{x^2(1+\sqrt{x^2+x}/x^2)}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+1/x}}{x\sqrt{1+\sqrt{x^2+x}/x^2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+1/x}}{\sqrt{1+\sqrt{x^2+x}/x^2}+1}=\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$$

2. Seja $f:]-\infty,0]\longrightarrow\mathbf{R}$, contínua, tal que $f(0)<0$ e $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$. Prove que f tem mínimo no intervalo $]-\infty,0]$.

Como $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, para cada $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $x<-1/\delta$ implica que $|f(x)|<\epsilon$. Então, com $\epsilon=-f(0)/2(>0)$, existe $\delta>0$ tal que $x<-1/\delta$ implica que $|f(x)|<\epsilon=-f(0)/2$ isto é, para $x<-1/\delta$, $f(0)/2<f(x)<-f(0)/2$ (não esquecer que $f(0)<0$). Então, como f é contínua, em particular sobre $[-1/\delta,0]$, pelo Teorema de Weierstrass, f tem mínimo em $[-1/\delta,0]$ isto é, existe $x_0\in[-1/\delta,0]$ tal que $f(x_0)=\min_{t\in[-1/\delta,0]}f(t)(\leq f(0))$. Por outro lado, $f(x_0)\leq f(0)\leq f(0)/2<f(x)$ para cada $x\in]-\infty,-1/\delta[$. Portanto $f(x_0)=\min_{t\in[-\infty,0]}f(t)$.

3. Justifique onde é diferenciável e calcule a função derivada de: $f(x)=\dfrac{1+\cos^2(\sin x)}{1+\sin^2(\cos x)}$

Após justificar onde f é diferenciável (que é em $\mathbf{R}$):

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1+\cos^2(\sin x)}{1+\sin^2(\cos x)}\right)' = \\
&= \frac{(1+\cos^2(\sin x))'(1+\sin^2(\cos x)) - (1+\cos^2(\sin x))(1+\sin^2(\cos x))'}{(1+\sin^2(\cos x))^2} = \\
&= \frac{(2\cos(\sin x))(\cos(\sin x))'(1+\sin^2(\cos x)) - (1+\cos^2(\sin x))(2\sin(\cos x))(\sin(\cos x))'}{(1+\sin^2(\cos x))^2} = \\
&= \frac{(2\cos(\sin x))(-\sin(\sin x))(\cos x)(1+\sin^2(\cos x))}{(1+\sin^2(\cos x))^2} - \\
&\qquad - \frac{(1+\cos^2(\sin x))(2\sin(\cos x))(\cos(\cos x))(-\sin x)}{(1+\sin^2(\cos x))^2}
\end{aligned}
$$