**CDI 1 - TP** **1o. MiniTeste** **LETI** **20/10/2021**

**Justifique as suas respostas**

**ESBOÇO de RESOLUÇÃO:**

1. Indique, se existirem, os majorantes, minorantes, supremo, ínfimo, máximo e/ou mínimo do conjunto $A = \{\, x \in \mathbf{R} \,:\, 3|2-x| \leq |x| \,\}$.

$$3|2-x| \leq |x| \iff |6-3x| \leq |x| \iff -|x| \leq 6-3x \text{ e } 6-3x \leq |x| \iff$$
$$\iff -6+3x \leq |x| \text{ e } \Big[6-3x \leq x \text{ ou } x \leq -6+3x\Big]$$
$$\iff \Big[x \leq 6-3x \text{ ou } -6+3x \leq x\Big] \text{ e } \Big[6 \leq 3x+x \text{ ou } 6 \leq 3x-x\Big] \iff$$
$$\iff \Big[3x+x \leq 6 \text{ ou } 3x-x \leq 6\Big] \text{ e } \Big[3/2 \leq x \text{ ou } 3 \leq x\Big] \iff$$
$$\iff \Big[x \leq 3/2 \text{ ou } x \leq 3\Big] \text{ e } \Big[3/2 \leq x \text{ ou } 3 \leq x\Big] \iff x \leq 3 \quad \text{e} \quad 3/2 \leq x \iff$$
$$\iff x \in [3/2, 3]$$

Portanto, o conjunto dos majorantes de $A$ é: $[3, +\infty[$. $\sup A = 3$ e como $3 \in A$, $\max A = 3$.

O conjunbto dos minorantes de $A$ é: $]-\infty, 3/2]$. $\inf A = 3/2$ e como $3/2 \in A$, $\min A = 3/2$.

2. Mostre, por indução que, qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$, $n^3 + 2n$ é divisível por 3.

(i) $n = 1$:
$$n^3 + 2n = 1^3 + 2 \cdot 1 = 3 = 3 \cdot 1$$
portanto a proposição é verdadeira para $n = 1$.

(ii) Suponhamos agora que a proposição é verdadeira para $n = l$ isto é, existe um número natural, chamemos-lhe $k_l$, tal que
$$l^3 + 2l = 3k_l \qquad \text{Hipótese de Indução (HI)}$$
Então:
$$(l+1)^3 + 2(l+1) = l^3 + 3l^2 + 3l + 1 + 2l + 2 =$$
$$= (l^3 + 2l) + (3l^2 + 3l + 1 + 2) \underset{\text{HI}}{=} 3k_l + 3(l^2 + l + 1) = 3(k_l + l^2 + l + 1)$$

Portanto, para além de a proposição ser verdadeira para $n = 1$, a proposição também é hereditária. Portanto, provámos por indução que, qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$, $n^3 + 2n$ é divisível por 3.

3. Seja $q$ um número real. Mostre, por indução que, qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$,

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^{2^2})\cdots(1+q^{2^n}) = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}.$$

(i) $n = 1$:

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^{2^2})\cdots(1+q^{2^n}) = (1+q)(1+q^2)(1+q^{2^2})\cdots(1+q^{2^1}) =$$
$$= (1+q^{2^0})(1+q^{2^1}) = (1+q)(1+q^2) = 1 +^q + q^2 + q^3 = \frac{(1-q)(1+q+q^2+q^3)}{1-q} =$$
$$= \frac{1-q^4}{1-q} = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q} \qquad \text{para } n = 1$$

(ii) Suponhamos agora que a proposição é verdadeira para $n = l$ isto é:

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^{2^2})\cdots(1+q^{2^l}) = \frac{1-q^{2^{l+1}}}{1-q} \qquad \text{Hipótese de Indução (HI).}$$

Então:

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^{2^2})\cdots(1+q^{2^l})(1+q^{2^{l+1}}) =$$
$$\left[(1+q)(1+q^2)(1+q^{2^2})\cdots(1+q^{2^l})\right]\cdot(1+q^{2^{l+1}}) \underset{\text{HI}}{=} \frac{1-q^{2^{l+1}}}{1-q}\cdot(1+q^{2^{l+1}}) =$$
$$= \frac{(1-q^{2^{l+1}})(1+q^{2^{l+1}})}{1-q} = \frac{1-(q^{2^{l+1}})^2}{1-q} = \frac{1-q^{(2^{l+1}\cdot 2)}}{1-q} = \frac{1-q^{2^{l+1+1}}}{1-q}$$

Portanto, para além de a proposição ser verdadeira para $n = 1$, a proposição também é hereditária. Portanto, provámos por indução que, qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$,

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^{2^2})\cdots(1+q^{2^n}) = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}.$$