CDI 1 - TP **1o. MiniTeste** **LEGI** **19/10/2021**

Justifique as suas respostas

ESBOÇO DE RESOLUÇÃO:

1. Indique, se existirem, os majorantes, minorantes, supremo, ínfimo, máximo e/ou mínimo do conjunto $A = \{ x \in \mathbf{R} : \frac{4-x}{x+1} > 3x \}$.

$$\frac{4-x}{x+1} > 3x \iff \frac{4-x}{x+1} - 3x > 0 \iff \frac{4-x-3x(x+1)}{x+1} > 0 \iff \frac{4-4x-3x^2}{x+1} > 0$$
$$\iff \frac{3x^2+4x-4}{x+1} < 0 \iff \frac{(3x-2)(x+2)}{x+1} < 0$$

		-2		-1		$2/3$	
$(3x-2)(x+2)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Q	$-$	0	$+$	SS	$-$	0	$+$

Portanto,
$$A =]-\infty, -2[\ \cup \ ]-1, 2/3[$$

A não tem minorantes nem ínfimo nem mínimo. Os majorantes de A constituem o conjunto $[2/3, +\infty[$. $\sup A = 2/3$ e como este não pertence ao conjunto A, não existe $\max A$.

2. Mostre, por indução que, qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+2) = \frac{(n-1)n(n+4)}{3}$.

   (i) $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+2) = \sum_{k=1}^{1} (k-1)(k+2) = (1-1)((1+2) = 0 \cdot 3 = \frac{(1-1)\cdot 1 \cdot (1+4)}{3} =$$
$$= \frac{(n-1)n(n+4)}{3} \qquad \text{para } n = 1.$$

   (ii) Suponhamos agora que para $n = l$ a proposição é verdadeira, isto é:

$$\sum_{k=1}^{l} (k-1)(k+2) = \frac{(l-1)l(l+4)}{3} \qquad \text{Hipótese de Indução (HI)}$$

Então:

$$\sum_{k=1}^{l+1} (k-1)(k+2) = \sum_{k=1}^{l} (k-1)(k+2) + ((l+1)-1)((l+1)+2) \underset{\text{HI}}{=}$$
$$= \frac{(l-1)l(l+4)}{3} + l(l+3) = l\frac{(l-1)(l+4)+3(l+3)}{3} = l\frac{l^2+3l-4+3l+9}{3} =$$
$$= l\frac{l^2+6l+5}{3} = l\frac{(l+1)(l+5)}{3} = \frac{((l+1)-1)(l+1)((l+1)+4)}{3}$$

Portanto, para além de a proposição ser verdadeira para $n = 1$, a proposição também é hereditária. Fica então provado por indução que, qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k+2) = \frac{(n-1)n(n+4)}{3}$$

3. Com $a, c \in \mathbf{R}^+$, $(a \neq c)$, $b, d \in \mathbf{R}$, que condição(ões) devem a, b, c, d satisfazer para que

$$\{\, x \in \mathbf{R} \,:\, |ax+b| < |cx+d| \,\} = \begin{cases} \mathbf{R} \setminus \{x_0\} & , \quad c > a \\ \{\} & , \quad c < a \end{cases}$$

Por outras palavras, não queremos soluções de $|ax+b| < |cx+d|$ quando $c < a$ e quando $c > a$ só um ponto é que não é solução. De qualquer forma, há que começar a resolver $|ax+b| < |cx+d|$:

$$|ax+b| < |cx+d| \quad \Longleftrightarrow \quad -|cx+d| < ax+b \text{ e } ax+b < |cx+d| \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad -ax-b < |cx+d| \text{ e } \Big[ax+b < cx+d \text{ ou } cx+d < -ax-b\Big] \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Big[-ax-b < cx+d \text{ ou } cx+d < ax+b\Big] \text{ e } \Big[b-d < cx-ax \text{ ou } cx+ax < -b-d\Big]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Big[-b-d < cx+ax \text{ ou } cx-ax < b-d\Big] \text{ e } \Big[b-d < (c-a)x \text{ ou } (c+a)x < -b-d\Big]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Big[-(b+d) < (c+a)x \text{ ou } (c-a)x < b-d\Big] \text{ e } \Big[b-d < (c-a)x \text{ ou } (c+a)x < -(b+d)\Big]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[-\frac{b+d}{c+a} < x \text{ ou } (c-a)x < b-d\right] \text{ e } \left[b-d < (c-a)x \text{ ou } x < -\frac{b+d}{c+a}\right] \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \left[-\dfrac{b+d}{c+a} < x \text{ ou } x < \dfrac{b-d}{c-a}\right] \text{ e } \left[\dfrac{b-d}{c-a} < x \text{ ou } x < -\dfrac{b+d}{c+a}\right] & \text{se } c > a; \\ \left[-\dfrac{b+d}{c+a} < x \text{ ou } x > \dfrac{b-d}{c-a}\right] \text{ e } \left[\dfrac{b-d}{c-a} > x \text{ ou } x < -\dfrac{b+d}{c+a}\right] & \text{se } c < a \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \left[-\dfrac{b+d}{c+a} < x \text{ e } \dfrac{b-d}{c-a} < x\right] \text{ ou } \left[x < \dfrac{b-d}{c-a} \text{ e } x < -\dfrac{b+d}{c+a}\right] & \text{se } c > a; \\ \left[-\dfrac{b+d}{c+a} < x \text{ e } \dfrac{b-d}{c-a} > x\right] \text{ ou } \left[x > \dfrac{b-d}{c-a} \text{ e } x < -\dfrac{b+d}{c+a}\right] & \text{se } c < a \end{cases}$$

Portanto a condição pedida é

$$-\frac{b+d}{c+a} = \frac{b-d}{c-a}$$