**CDI 1 - TP** **1o. MiniTeste** **LEE** **21/10/2021**
**Justifique as suas respostas**

## ESBOÇO de RESOLUÇÃO

1. Indique, se existirem, os majorantes, minorantes, supremo, ínfimo, máximo e/ou mínimo do conjunto $A = \{\, x \in \mathbf{R} \,:\, |3-2x| \geq |x+2| \,\}$.

$$
\begin{aligned}
& |3-2x| \geq |x+2| \iff -|3-2x| \leq x+2 \text{ e } x+2 \leq |3-2x| \iff \\
\iff\ & -x-2 \leq |3-2x| \text{ e } \Big[3-2x \geq x+2 \text{ ou } 3-2x \leq -x-2\Big] \iff \\
\iff\ & \Big[3-2x \geq -x-2 \text{ ou } 3-2x \leq x+2\Big] \text{ e } \Big[3-2 \geq 2x+x \text{ ou } 3+2 \leq 2x-x\Big] \iff \\
\iff\ & \Big[3+2 \geq 2x-x \text{ ou } 3-2 \leq 2x+x\Big] \text{ e } \Big[1 \geq 3x \text{ ou } 5 \leq x\Big] \iff \\
\iff\ & \Big[5 \geq x \text{ ou } 1/3 \leq x\Big] \text{ e } \Big[1/3 \geq x \text{ ou } 5 \leq x\Big] \iff \Big[1/3 \geq x \text{ ou } 5 \leq x\Big] \\
\iff\ & x \in ]-\infty, 1/3] \cup [5, +\infty[
\end{aligned}
$$

Portanto o conjunto $A$ não tem majorantes nem minorantes, nem supremo nem ínfimo, nem máximo nem mínimo.

2. Mostre, por indução que, qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$, 13 divide $2^{4n+2} + 3^{n+2}$.

(i) $n = 1$:

$$2^{4n+2} + 3^{n+2} = 2^{4\cdot 1+2} + 3^{1+2} = 2^6 + 3^3 = 64 + 27 = 91 = 13 \cdot 7$$

Portanto, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

(ii) Suponhamos que a proposição é verdadeira para $n = l$, isto é, existe um número natural, chamemos-lhe $k_l$, tal que

$$2^{4l+2} + 3^{l+2} = 13k_l \qquad \text{Hipótese de Indução (HI)}$$

Então,

$$
\begin{aligned}
& 2^{4(l+1)+2} + 3^{(l+1)+2} = 2^{4l+2+4} + 3^{l+2+1} = 2^{4l+2}2^4 + 3^{l+2}3^1 = \\
& = 16(2^{4l+2} + 3^{l+2}) - 16 \cdot 3^{l+2} + 3 \cdot 3^{l+2} \underset{\text{HI}}{=} 16 \cdot 13k_l - 13 \cdot 3^{l+2} = 13 \cdot (16k_l - 3^{l+2})
\end{aligned}
$$

Portanto , a proposição, para além de ser verdadeira para $n = 1$, é também hereditária. Fica portanto provado por indução que, qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$, 13 divide $2^{4n+2} + 3^{n+2}$.

3. Mostre, por indução, que, qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+i} \leq 5/6$.

(i) $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+i} = \sum_{i=1}^{1+1} \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} = 1/2 + 1/3 = 5/6 \leq 5/6$$

Portanto, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

(ii) Suponhamos agora que a proposição é verdadeira para $n = l$ ou seja:

$$\sum_{i=1}^{l+1} \frac{1}{l+i} \leq 5/6 \qquad \text{Hipótese de Indução (HI)}$$

Então

$$\sum_{i=1}^{(l+1)+1} \frac{1}{(l+1)+i} = \frac{1}{(l+1)+1} + \cdots + \frac{1}{(l+1)+(l)} + \frac{1}{(l+1)+(l+1)} + \frac{1}{(l+1)+(l+2)} =$$

$$= -\frac{1}{l+1} + \left( \frac{1}{l+1} + \frac{1}{(l+1)+1} + \cdots + \frac{1}{(l+1)+(l)} \right) + \frac{1}{(l+1)+(l+1)} + \frac{1}{(l+1)+(l+2)}$$

$$= -\frac{1}{l+1} + \left( \sum_{i=1}^{l+1} \frac{1}{l+i} \right) + \frac{1}{(l+1)+(l+1)} + \frac{1}{(l+1)+(l+2)} \underset{\text{HI}}{\leq}$$

$$\leq -\frac{1}{l+1} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2(l+1)} + \frac{1}{2(l+1)+1} < -\frac{1}{l+1} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2(l+1)} + \frac{1}{2(l+1)} =$$

$$= -\frac{1}{l+1} + \frac{5}{6} + \frac{1}{(l+1)} = \frac{5}{6}$$

Portanto, para além de a proposição ser verdadeira para $n = 1$, a proposição também é hereditária. Fica então provado por indução que, qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+i} \leq 5/6$.