Notas sobre Séries Numéricas

Pedro Lopes
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico - Tagus Park
1o. Semestre 2021/2022

Estas notas constituem um material de apoio ao curso de Cálculo Diferencial e Integral I para as licenciaturas em Engenharia de TeleComunicações e Informática, em Engenharia Electrónica e em Engenharia e Gestão Industrial do Instituto Superior Técnico no Tagus Park, no 2o. semestre de 2021/2022 e não pretendem ser um substituto dos manuais escolares disponíveis.

1 Introdução

Seja r um número real.

Defina-se a sucessão $u_k = r^k$, para cada $k \in \mathbf{N}$.

Some-se os termos desta sucessão desde $k = p$ até $k = N$:

$$S_N = \sum_{k=p}^{N} r^k.$$

Será possível encontrar uma forma fechada para esta soma, isto é, exprimir S_N à custa de N e r envolvendo funções conhecidas (polinómios, funções racionais, trigonométricas, exponencial, logaritmo, etc.)? Vejamos:

$$S_N = \sum_{k=p}^{N} r^k = r^p + r^{p+1} + r^{p+2} + \cdots + r^{N-1} + r^N,$$

donde

$$S_{N+1} = \sum_{k=p}^{N+1} r^k = r^p + r^{p+1} + r^{p+2} + \cdots + r^{N-1} + r^N + r^{N+1} = S_N + r^{N+1},$$

e por outro lado,

$$S_{N+1} = \sum_{k=p}^{N+1} r^k = r^p + r^{p+1} + r^{p+2} + \cdots + r^{N-1} + r^N + r^{N+1} = r^p + r(r^p + r^{p+1} + r^{p+2} + \cdots + r^{N-1} + r^N) = r^p + rS_N,$$

donde

$$r^p + rS_N = S_{N+1} = S_N + r^{N+1},$$

donde

$$(1-r)S_N = r^p - r^{N+1}$$

e portanto

$$S_N = \frac{r^p - r^{N+1}}{1-r} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & r > 1 \\ \dfrac{r^p}{1-r} & |r| < 1 \\ \text{sem limite} & r \leq -1 \end{cases}$$

Finalmente, temos:

$$\sum_{k=p}^{+\infty} r^k = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=p}^{N} r^k = \lim_{N\to+\infty} S_N = \begin{cases} +\infty & r \geq 1 \\ \dfrac{r^p}{1-r} & |r| < 1 \\ \text{sem limite} & r \leq -1. \end{cases}$$

Este é então o nosso primeiro exemplo de uma série, isto é, uma soma com infinitas parcelas. Como podemos ver, consoante o valor de r, a série representa ou não um número real. Isto é a série converge (representa um número real) ou diverge (não representa um número real). Mais ainda, no caso desta série, em caso de convergência, sabemos exactamente o valor do número real que a série representa. De um modo geral, ficaremos satisfeitos em saber se uma dada série converge ou se diverge.

Vejamos outro exemplo (ou colecção de exemplos) de série somável (isto é, que em caso de convergência sabemos exactamente o valor em questão). Dada uma sucessão de números reais,

$$(u_n),$$

considere-se a sucessão

$$v_n = u_{n+1} - u_n, \qquad \text{para cada} \quad n \in \mathbf{N}$$

e some-se os termos desta sucessão desde $n = p$ até $n = N$:

$$\sum_{n=p}^{N} v_n = \sum_{n=p}^{N} (u_{n+1} - u_n) = \cdots = u_{N+1} - u_p \quad \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \quad \lim_{N \to +\infty} u_N - u_p.$$

Estas séries são ditas séries telescópicas ou séries de Mengoli.

Eis um exemplo concreto:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \cdots \text{TPC} \cdots = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \right) = 1.$$

Portanto, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (i) converge e (ii) a sua soma é 1.

Outros exemplos de séries relacionadas com a série de Mengoli:

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n^2 + 17n + 18}{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}$.

Definição 1.1. *Uma série é uma soma com infinitas parcelas. Assim, as somas com um número finito de parcelas também podem ser encaradas como séries; basta adicionar-lhes um número infinito de parcelas nulas. No entanto, neste texto quando falarmos de séries referir-nos-emos a somas com um número infinito de parcelas não nulas.*

Notação:

$$\sum_{n=p}^{+\infty} u_n \overset{def.}{=} \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=p}^{N} u_n.$$

Terminologia:

$$u_n : \qquad \textit{termo geral da série} \quad \sum_{n=p}^{+\infty} u_n$$

$$S_N = \sum_{n=p}^{N} u_n : \qquad \textit{(sucessão das) somas parciais da série} \quad \sum_{n=p}^{+\infty} u_n$$

Séries com a mesma natureza: se uma converge, a outra também converge; se uma diverge, a outra também diverge.

As séries podem ainda subdividir-se de acordo com o seguinte esquema:

$$
\text{Séries :}\quad
\begin{cases}
\text{Séries de Funções:} & \begin{cases} \text{Séries de Potências (Ex: } \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \text{).} \\[2ex] \text{Outras Séries de Funções (Ex: } \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \sin(x^k) \text{).} \end{cases} \\[6ex]
\text{Séries Numéricas:} & \begin{cases} \text{Séries de Termos Positivos (Não Negativos) (Ex: } \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (1/2^k) \text{).} \\[2ex] \text{Séries de Termos sem Sinal Definido (Ex: } \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \text{).} \end{cases}
\end{cases}
$$

Alguns factos sobre séries:

Proposição 1.1. *Sejam*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} u_n \qquad e \qquad \sum_{n=p}^{+\infty} u_n$$

séries convergentes e $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. *Então, a série*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \Big(\lambda u_n + \mu v_n \Big)$$

também converge e

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \Big(\lambda u_n + \mu v_n \Big) = \lambda \sum_{n=p}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=p}^{+\infty} v_n.$$

Proof. Tem-se,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \Big(\lambda u_n + \mu v_n \Big) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=p}^{N} \Big(\lambda u_n + \mu v_n \Big) = \lim_{N \to +\infty} \Big(\lambda \sum_{n=p}^{N} u_n + \mu \sum_{n=p}^{N} v_n \Big) =$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \Big(\lambda \sum_{n=p}^{N} u_n + \mu \sum_{n=p}^{N} v_n \Big) = \lambda \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=p}^{N} u_n + \mu \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=p}^{N} v_n = \lambda \sum_{n=p}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=p}^{+\infty} v_n$$

□

Proposição 1.2. *Se uma série converge então o seu termo geral tendo para zero, isto é,*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} u_n = S \in \mathbf{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

Proof. Com

$$S_N = \sum_{n=p}^{N} u_n$$

tem-se

$$\lim_{N \to +\infty} S_N = S = \lim_{N \to +\infty} S_{N-1}$$

donde

$$0 = S - S = \lim_{N \to +\infty} S_N - \lim_{N \to +\infty} S_{N-1} = \lim_{N \to +\infty} \Big(S_N - S_{N-1} \Big) = \lim_{N \to +\infty} u_N$$

□

Este resultado, expresso na forma do contra-recíproco, é útil para identificar certas séries divergentes:

Corolário 1.1. *Se o termo geral não tende para zero, a série diverge.*

No entanto, há séries divergentes, cujo termo geral converge para zero, como veremos de seguida.

2 Séries Numéricas de Termos Positivos (Não Negativos).

Eis um exemplo de série divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{(Série Harmónica)} :$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}.$$

$$S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} = S_N + \underbrace{\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{N+N}}_{N \text{ parcelas}} \geq$$

$$\geq S_N + \underbrace{\frac{1}{N+N} + \frac{1}{N+N} + \cdots + \frac{1}{N+N}}_{N \text{ parcelas}} = S_N + N\frac{1}{2N} = S_N + \frac{1}{2}$$

donde

$$(*) \qquad S_{2N} - S_N \geq \frac{1}{2}, \qquad \text{para todo o } N \in \mathbf{N}.$$

Se a série converge, isto é, se existe

$$\lim_{N\to+\infty} S_N (= S)$$

então:

$$\lim_{N\to+\infty} \Big(S_{2N} - S_N \Big) = \lim_{N\to+\infty} S_{2N} - \lim_{N\to+\infty} S_N = S - S = 0$$

o que contradiz $(*)$, já que

$$S_{2N} - S_N \geq \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{N\to+\infty} S_{2N} - S_N \geq \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Portanto, a série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Mais uma vez, este é um exemplo de uma série divergente mas cujo termo geral tende para zero.

Proposição 2.1 (Critério de Majoração)**.** *Se u_n e v_n são tais que a partir de certa ordem se tem $0 \leq u_n \leq v_n$ então*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} v_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=p}^{+\infty} u_n \text{ converge} .$$

Proof. A soma parcial de uma série de termos positivos é uma sucessão crescente. Portanto, basta ser limitada para ser convergente. Como $u_n \leq v_n$ então

$$\sum_{n=p}^{N} u_n \leq \sum_{n=p}^{N} v_n \leq \sum_{n=p}^{+\infty} v_n,$$

portanto

$$\sum_{n=p}^{+\infty} u_n \quad \text{converge} .$$

□

Note que o contra-recíproco também é importante:

Corolário 2.1. *Se u_n e v_n são tais que a partir de certa ordem se tem $0 \leq u_n \leq v_n$ então*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} u_n \ \textit{diverge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=p}^{+\infty} v_n \ \textit{diverge} .$$

Podemos então iniciar um catálogo de séries. Como já sabemos que a série harmónica ($\sum \frac{1}{n}$) diverge, então,

$$\alpha \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{diverge}$$

Proposição 2.2 (Critério do limite)**.** *Sejam u_n e v_n sucessões de termos não negativos e*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l.$$

Então:

(i) $0 < l < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=p}^{+\infty} u_n, \sum_{n=p}^{+\infty} v_n$ *têm a mesma natureza.*

(ii) $l = 0$ *e* $\sum_{n=p}^{+\infty} v_n$ *converge* $\Longrightarrow$ $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ *converge .*

(iii) $l = +\infty$ *e* $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ *converge* $\Longrightarrow$ $\sum_{n=p}^{+\infty} v_n$ *converge .*

e respectivos contra-recíprocos.

Proof. Provaremos (i).

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbf{N} \quad : \quad n \geq k \Longrightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \epsilon$$

isto é

$$l - \epsilon < \frac{u_n}{v_n} < l + \epsilon.$$

Portanto, com $\epsilon = l/2$, existe $k \in \mathbf{N}$ tal que, para $n >\geq k$,

$$(0 <) l/2 < \frac{u_n}{v_n} < 3l/2 \quad \Longrightarrow \quad (l/2) v_n < u_n \quad \text{e} \quad u_n < (3l/2) v_n \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (l/2) \sum_{n=k}^{+\infty} v_n < \sum_{n=k}^{+\infty} u_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=k}^{+\infty} u_n < (3l/2) \sum_{n=k}^{+\infty} v_n$$

Portanto, as séries têm a mesma natureza. □

Portanto, como

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

converge (como vimos quando falámos de séries de Mengoli) e como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1$$

então, pelo critério do limite, $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Por outro lado, pelo critério de comparação, para cada $\alpha \geq 2$, $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge. De facto, basta que $\alpha > 1$ para que a série convirja, ou seja:

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \begin{cases} \text{converge} & \alpha > 1; \\ \\ \text{diverge} & \alpha \leq 1. \end{cases}.$$

Proposição 2.3. *Seja u_n sucessão de termos não negativos.*

(i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1 \implies \sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ *converge*

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1 \implies \sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ *converge*

Proof. (i) Seja $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l < 1$. Então, existe $l < \lambda < 1$ e existe $k \in \mathbf{N}$ tal que, para $n \geq k$,

$$\sqrt[n]{u_n} < \lambda \implies u_n < \lambda^n.$$

Como $0 < \lambda < 1$ então λ é a razão de uma série geométrica convergente. Pelo critério da majoração, a série

$$\sum_{n=p}^{+\infty} u_n \text{ converge}$$

(ii) Seja agora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l > 1$. Então, existe $k \in \mathbf{N}$ tal que, para $n \geq k$,

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1 \implies u_n \geq 1 \implies \lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \implies \sum_{n=p}^{+\infty} u_n \text{ diverge}$$

□

Exemplo: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Proposição 2.4. *Seja u_n de termos não negativos. Suponha que*

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Então:

(i) $\displaystyle l < 1 \implies \sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ *converge*

(ii) $\displaystyle l > 1 \implies \sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ *diverge*

Proof. (i) Seja $l < 1$. Então existe $l < \lambda < 1$ e $k \in \mathbf{N}$ tal que, para $n \geq k$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda = \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{\lambda^{n+1}} < \frac{u_n}{\lambda^n}$$

ou seja a partir de certa ordem, a sucessão $0 < \frac{u_n}{\lambda^n}$ decresce. Portanto existe $c > 0$ tal que, a partir de certa ordem,

$$\frac{u_n}{\lambda^n} < c \quad \Longrightarrow \quad u_n < c \cdot \lambda^n.$$

Como $0 < \lambda < 1$ é a razão de uma série geométrica convergente, então

$$\sum_{n=p}^{+\infty} u_n \quad \text{converge}$$

(ii) $l > 1 \quad \Longrightarrow \quad u_n < u_{n+1}$ a partir de certa ordem $\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ diverge

□

Exemplos (a Matemática é consistente!):

1. Dado $r \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} r^n$ (exemplo já estudado, de outra maneira.)

2. $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ (mais simples usar critério de majoração!)

3. $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(2n)!}{1+3^n}$ (... mas se há factoriais e exponenciais, usar o critério de d'Alembert ...)

3 Convergência simples e convergência absoluta.

Definição 3.1. *Dada uma série,* $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$,

(i) se $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} |u_n|$ *converge, diz-se que* $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ *converge absolutamente;*

(ii) se $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ *converge, mas* $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} |u_n|$ *diverge, diz-se que* $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ *converge simplesmente.*

Notar que a Definição 3.1 é consistente já que:

Proposição 3.1. *Se* $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} |u_n|$ *converge, então* $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ *também converge.*

Proof. Considere

$$(0 \leq) \quad u_n^+ = \frac{|u_n| + u_n}{2} \quad (\leq |u_n|) \qquad\qquad (0 \leq) \quad u_n^- = \frac{|u_n| - u_n}{2} \quad (\leq |u_n|).$$

Pelo critério de majoração, as séries $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} u_n^+$ e $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} u_n^-$ convergem. Por outro lado, tem-se:

$$u_n = u_n^+ - u_n^-$$

donde:
$$+\infty > \sum_{n=p}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=p}^{+\infty} u_n^- = \sum_{n=p}^{+\infty} (u_n^+ - u_n^-) = \sum_{n=p}^{+\infty} u_n$$
que é então uma série convergente. □

Exemplo: $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (série harmónica alternada) converge simplesmente.

De facto, $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{n}$ que já vimos que é divergente.

Falta ver que $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Isto será uma consequência do próximo resultado:

4 Séries Numéricas de Termos Alternados

Definição 4.1. *Uma série de termos alternados tem o seguinte aspecto:*
$$\sum_{n=p}^{+\infty} (-1)^n u_n,$$
onde u_n é uma sucessão de termos não-negativos.

Proposição 4.1. *Seja u_n uma sucessão (i) decrescente e (ii) de termos não-negativos. Então,*
$$\sum_{n=p}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n \quad \textit{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Proof.

1. ($\Longrightarrow$) Como a série converge então o termo geral tende para zero:
$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} u_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |(-1)^{n-1} u_n| = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0,$$
já que $u_n \geq 0$.

2. ($\Longleftarrow$) Faça-se $S_N = \displaystyle\sum_{n=p}^{N} (-1)^{n-1} u_n$. Tem-se:
$$S_{2N+2} - S_{2N} = (-1)^{(2N+1)-1} u_{2N+1} + (-1)^{(2N+2)-1} u_{2N+2} = u_{2N+1} - u_{2N+2} \geq 0,$$
(porque u_n é decrescente) donde S_{2N} é sucessão crescente.
Por outro lado,
$$S_{2N+1} - S_{2N-1} = (-1)^{(2N)-1} u_{2N} + (-1)^{(2N+1)-1} u_{2N+1} = -u_{2N} + u_{2N+1} \leq 0,$$
(porque u_n é decrescente) donde S_{2N+1} é sucessão decrescente.
Tem-se também,
$$S_{2N} - S_{2N-1} = -u_{2N} \leq 0 \iff S_{2N} \leq S_{2N-1} \implies S_2 \leq S_{2N} \leq S_{2N-1} \leq S_1$$
onde a última implicação resulta de S_{2N} ser crescente e S_{2N-1} ser decrescente. Em particular, notamos que ambas as sucessões são limitadas e monotonas, portanto são ambas convergentes. Vamos agora ver que convergem para o mesmo limite:
$$\lim_{N\to+\infty} (S_{2N} - S_{2N-1}) = \lim_{N\to+\infty} (-u_{2N}) = 0 \implies \lim_{N\to+\infty} S_{2N} = \lim_{N\to+\infty} S_{2N-1}$$
e portanto S_N converge ou seja, a série $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n$ converge.

□

De acordo com este resultado, a série $\sum_{n=p}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ converge, já que $1/n$ é sucessão decrescente para zero.

Como já tínhamos visto que $\sum_{n=p}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right|$ diverge, então a série $\sum_{n=p}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ converge simplesmente.