Cálculo Diferencial e Integral I - LEE - LEGI - LETI **1o. Semestre 2021/2022**
4a. Lista de exercícios

A **Teoremas de Rolle e Lagrange:**

1. Use o Teorema de Lagrange para deduzir as seguintes desigualdades:
   (a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbf{R}$.

   (b) $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbf{R}$.

   (c) $ny^{n-1}(x - y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x - y)$, se $0 < y \leq x$ e $n \in \mathbf{N}$.

2. Mostre que se f é de classe C^1 em $[a, b]$, com $a < b \in \mathbf{R}$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$, quaisquer que sejam $x, y \in [a, b]$.

3. Seja $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ diferenciável, com derivada $g' : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ contínua e limitada e $g(0) = 0$. Mostre que se $h : \mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$ é dada por

$$h(x) = \frac{g(x)}{x}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

   então h é limitada em $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ e é prolongável por continuidade a zero.

4. Seja $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ uma função diferenciável. Mostre que:
   (a) Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha \in \mathbf{R}$ e $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \beta \in \mathbf{R}$, então $\beta = 0$.
   (b) Se $\lim_{x \to +\infty} f'(x) > 0$ então $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   (c) É possível que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha \in \mathbf{R}$ e não exista $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$.
   (d) É possível que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ e não exista ou seja infinito $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

B **Regra de Cauchy:**

1. $(a)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3} \qquad (b)\ \lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos(ax))}{\log(\cos(bx))} \qquad (c)\ \lim_{x \to 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2}$

2. $(a)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x^2} \qquad (b)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{2^x}{x^2} \qquad (c)\ \lim_{x \to 1^-} \log(x) \log(1 - x)$

3. $(a)\ \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} \qquad (b)\ \lim_{x \to 0^+} \sin(x) \log(x) \qquad (c)\ \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^{1000}}$

4. $(a)\ \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} \qquad (b)\ \lim_{x \to 0^+} x \log\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad (c)\ \lim_{x \to +\infty} x \log\left(\frac{x}{x+1}\right)$

5. $(a)\ \lim_{x \to 1^+} (\log x)^{x-1} \qquad (b)\ \lim_{x \to +\infty} \sin(1/x) \log(x) \qquad (c)\ \lim_{x \to +\infty} \sin(1/x) e^x$

6. $(a)\ \lim_{x \to 0^+} (e^x - 1)^x \qquad (b)\ \lim_{x \to 0^+} x^{(e^x - 1)} \qquad (c)\ \lim_{x \to 0} \sin(x) \sin(1/x)$

7. $(a)\ \lim_{x \to +\infty} x^{1/4} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \qquad (b)\ \lim_{x \to +\infty} (2 + x^3)^{(1/\log(x))} \qquad (c)\ \lim_{x \to +\infty} (3 + x^2)^{(1/\log(x))}$

8. $(a)\ \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x$ $\quad(b)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$ $\quad(c)\ \lim_{x\to 0}(1-\cos x)^x$

9. $(a)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ $\quad(b)\ \lim_{x\to +\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{1/x}$ $\quad(c)\ \lim_{x\to +\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x}$

10. $(a)\ \lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{1/x^2}$ $\quad(b)\ \lim_{x\to +\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$ $\quad(c)\ \lim_{x\to +\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{1/x^2}$

11. $(a)\ \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{1/\log x}$ $\quad(b)\ \lim_{x\to +\infty}x^{\frac{1}{x-1}}$ $\quad(c)\ \lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{1/\log x}$

12. $(a)\ \lim_{x\to 1^+}x^{\log(\log x)}$ $\quad(b)\ \lim_{x\to +\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{\log x}}$ $\quad(c)\ \lim_{x\to 0^+}x^{(x^x-1)}$

13. $(a)\ \lim_{x\to 0^+}x^{(x^x)}-1$ $\quad(b)\ \lim_{x\to 0^-}(1-2^x)^{\sin x}$ $\quad(c)\ \lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\sin x}$

14. $(a)\ \lim_{x\to 0^+}x^{1/\log x}$ $\quad(b)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x}$ $\quad(c)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

15. $(a)\ \lim_{x\to -\infty}x\arcsin(1/x)$ $\quad(b)\ \lim_{x\to +\infty}x\arcsin(1/x)$ $\quad(c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$

16. $(a)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\sin(1/x)}{\arctan(1/x)}$ $\quad(b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x)-2\arcsin(x)}{x^3}$

17. $(a)\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x)\right)^{1/x}$ $\quad(b)\ \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan(x)\right)^{1/x}$

C **Representação gráfica de funções:**

1. Determine intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas e esboce gráficos de:

   1. $(a)\ x+\frac{1}{x^2}$ $\quad(b)\ \frac{1}{(x-1)(x-3)}$ $\quad(c)\ \frac{x^2-4}{x^2-9}$ $\quad(d)\ xe^{1/x}$

   2. $(a)\ \frac{x}{1+x^2}$ $\quad(b)\ \frac{|x|}{1-|x|}$ $\quad(c)\ x^2e^{-x}$ $\quad(d)\ \frac{x}{1+\log x}$

2. Considere a função $f:[0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$, contínua no ponto 0 e tal que

$$f(x)=\sqrt{x}\log(x), \qquad x>0.$$

   (a) Calcule $f(0)$.
   (b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x=0$ e $x=1$.
   (c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
   (d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

3. Considere a função $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ definida por

$$f(x)=|x|e^{-x^2/2}, \qquad x\in\mathbf{R}.$$

   (a) Calcule $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
   (b) Determine justificando os pontos onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.
   (c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
   (d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.