Cálculo Diferencial e Integral I - LEE - LEGI - LETI **1o. Semestre 2021/2022**
2a. Lista de exercícios

A **Limites:**

1. Determine, ou justifique que não existem, os limites quando $x \to 0, x \to +\infty, x \to -\infty$ das funções definidas por:
   (a) $\sin \frac{1}{x}$, (b) $x \sin \frac{1}{x}$.
   Verifique se as funções são par ou ímpar e esboce os respectivos gráficos.
2. Determine, ou justifique que não existem, os limites quando $x \to 0^+, x \to 0^-, x \to +\infty, x \to -\infty$ das funções definidas por:
   (a) $\sinh \frac{1}{x}$, (b) $\cosh \frac{1}{x^2}$.
3. Suponha que para todo o $n \in$, a função f verifica a condição:
$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{n}\right).$$
   Se existirem os limites laterais $f(0^+)$ e $f(0^-)$, quanto valerá a sua soma? Se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$, qual será o seu valor? Justifique.
4. Determine se existirem cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite.
$$(i) \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}, \qquad (ii) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, \qquad (iii) \quad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}, \qquad (iv) \quad \lim_{x\to +\infty} x^{3/2}\sin\frac{1}{x},$$
$$(v) \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(\sqrt{x})}{2x}, \quad (vi) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}, \quad (vii) \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\arctan x}{x}, \quad (viii) \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(1+\sqrt{x})}{e^{x-\sqrt{x}}}.$$
5. Para cada uma das funções definidas pelas seguinte expressões, determine o seu domínio e analise a sua continuidade.
$$(i) \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}, \qquad (ii) \quad \sin\left(\cos\sqrt{1-x^2}\right), \qquad (iii) \quad \frac{|x^2-1|}{x^2-1} \quad .$$
6. Seja $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, contínua no ponto 1, e dada por
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \le -1; \\ \arcsin x, & \text{se } -1 < x < 1; \\ K \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$
   (a) Determine K.
   (b) Estude f do ponto de vista da continuidade.
   (c) Indique o contradomínio de f e se tem supremo, ínfimo, máximo, mínimo.
   (d) Quais são os limites $\lim_{x\to -\infty} f$ e $\lim_{x\to +\infty} f$, caso existam?
7. Considere a função $g : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbf{R}$, dada por
$$g(x) = \arctan \frac{1}{|x+1|}.$$
   Verifique que g é prolongável por continuidade ao ponto -1. Sendo $G : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ esse prolongamento, determine o contradomínio de G.
8. Considere a função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} 3\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right), & \text{se } x > 0, \\ (k-x)(x+1), & \text{se } x < 0 \ , \end{cases}$$
   onde k é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine a constante $k \in \mathbf{R}$ tal que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

(c) Sendo $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ esse seu prolongamento, determine justificando, o contradomínio de F.

9. Mostre que a função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$f(x) = xD(x),$$

em que $D : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ é a função de Dirichlet, é contínua em $x = 0$ e é descontínua em todos os outros pontos.

B Propriedades Globais de Funções Contínuas

1. Seja f uma função contínua no intervalo fechado e limitado $[0, 1]$, tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo o $x \in [0, 1]$. Prove que f tem um ponto fixo i.e., que existe um ponto $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. Sugeatão: aplique o Teorema de Bolzano à função $g(x) = f(x) - x$.
2. Seja f uma função contínua tal que $f(-1) = 0 = f(1)$. Prove que f tem um ponto fixo.
3. Seja $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ uma função contínua e suponha que existe $b > 0$ tal que $f(b) < f(x)$ para todo o $x > b$. Mostre que f tem um mínimo em $[0, +\infty]$.
4. Seja f uma função contínua em $\mathbf{R}$, com limites positivos quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, e tal que $f(0) < 0$. Mostre que:
   (i) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções reais.
   (ii) f tem mínimo em $\mathbf{R}$.
5. Seja $f :] - 1, 1[\longrightarrow \mathbf{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty = \lim_{x\to1^-} f(x).$$

   Prove que f tem máximo no intervalo $] - 1, 1[$.
6. Sejam f e g duas funções contínuas em $\mathbf{R}$, e considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbf{R} : f(x) < g(x)\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : f(x) > g(x)\}$, e $C = \{x \in \mathbf{R} : f(x) = g(x)\}$. Prove que, se A e B são não-vazios, então C também é não-vazio.
7. Seja $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ uma função contínua tal que

$$f(0) > 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

   Prove que f tem máximo no intervalo $[0, +\infty[$.