Cálculo Diferencial e Integral I - LEE - LEGI - LETI **1o. Semestre 2021/2022**
1a. Lista de exercícios

A **Inequações:**

1. Mostrar que:
   (i) $\{x \in \mathbf{R} : \frac{x+2}{x-1} \leq 3\} = \left]-\infty, 1\right[\cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$
   (ii) $\{x \in \mathbf{R} : \frac{x+2}{x-1} > 3\} = \left]1, \frac{5}{2}\right[$
   (iii) $\{x \in \mathbf{R} : \frac{x+3}{x-2} \leq 1\} = \left]-\infty, 2\right[$
   (iv) $\{x \in \mathbf{R} : \frac{x+3}{x-2} > 1\} = \left]2, +\infty\right[$
   (v) $\{x \in \mathbf{R} : \frac{x-2}{x+3} < 2x\} = \left]-3, -2\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$
   (vi) $\{x \in \mathbf{R} : \frac{x+2}{3-x} > 2x\} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]2, 3\right[$
   (vii) $\{x \in \mathbf{R} : \frac{x+4}{x-1} < 3x\} = \left]-\frac{2}{3}, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[$
   (viii) $\{x \in \mathbf{R} : \frac{4-x}{x+1} > 3x\} = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]-1, \frac{2}{3}\right[$
2. (Agora com módulos) Mostrar que:
   (i) $\{x \in \mathbf{R} : |3-x| > 2\} = \left]-\infty, 1\right[\cup \left]5, +\infty\right[$
   (ii) $\{x \in \mathbf{R} : 3 < 2|x-1| \leq 5\} = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$
   (iii) $\{x \in \mathbf{R} : |x+2| \leq 3 \wedge x+1 > 0\} = \left]-1, 1\right]$
   (iv) $\{x \in \mathbf{R} : |4x+3| > 1\} = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$
   (v) $\{x \in \mathbf{R} : |5+3x| \geq 2\} = \left]-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup [-1, +\infty[$
   (vi) $\{x \in \mathbf{R} : |1-4x| < 5\} = \left]-1, \frac{3}{2}\right[$
   (vii) $\{x \in \mathbf{R} : |2-5x| \leq 3\} = \left[-\frac{1}{5}, 1\right]$
   (viii) $\{x \in \mathbf{R} : |3x+4| \geq 1\} = \left]-\infty, -\frac{5}{3}\right[\cup \left[-1, +\infty\right[$
3. Mostrar que:
   (i) $\{x \in \mathbf{R} : |6x-5| < |1-8x|\} = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]\frac{3}{7}, +\infty\right[$
   (ii) $\{x \in \mathbf{R} : |x| \leq |x-2|\} = \left]-\infty, 1\right]$
   (iii) $\{x \in \mathbf{R} : |3x-4| \leq |8-9x|\} = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup \left[1, +\infty\right[$
   (iv) $\{x \in \mathbf{R} : |3-2x| \geq |x+2|\} = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[5, +\infty\right[$
   (v) $\{x \in \mathbf{R} : |2x-7| < |1-6x|\} = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$
   (vi) $\{x \in \mathbf{R} : |5-2x| > |4x-9|\} = \left]2, \frac{7}{3}\right[$
   (vii) $\{x \in \mathbf{R} : |3x-5| \leq |1-4x|\} = \left]-\infty, -4\right] \cup \left[\frac{6}{7}, +\infty\right[$
   (viii) $\{x \in \mathbf{R} : 3|2-x| \leq |x|\} = \left[\frac{3}{2}, 3\right]$
4. Mostrar que:
   (i) $\{x \in \mathbf{R} : 4 < x^2 < 9\} = \left]-3, -2\right[\cup \left]2, 3\right[$
   (ii) $\{x \in \mathbf{R} : x^2-1 > 0 \wedge x-3 \leq 0\} = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, 3\right]$
   (iii) $\{x \in \mathbf{R} : x^2-2x-3 \geq 0\} = \left]-\infty, -1\right] \cup \left[3, +\infty\right[$
   (iv) $\{x \in \mathbf{R} : 2-x-x^2 > 0\} = \left]-2, 1\right[$
   (v) $\{x \in \mathbf{R} : |3-2x+x^2| < 5\} = \left]1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right[$
   (vi) $\{x \in \mathbf{R} : |15+2x-x^2| \geq 9\} = \left]-\infty, -4\right] \cup \left[1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}\right] \cup \left[6, +\infty\right[$
   (vii) $\{x \in \mathbf{R} : |3x^2+4x| \leq 1\} = \left[\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, -1\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right]$
   (viii) $\{x \in \mathbf{R} : |3x^2-5x+1| \geq 1\} = \left]-\infty, 0\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty\right[$

B **Indução Matemática:**

1. Mostrar por indução que:
   (i) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$,
   (ii) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$,
   (iii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$,
   (iv) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$,
   (v) $(1+h)^n \geq 1 + nh$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$ e para qualquer $h \geq -1$, real,
   (vi) $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$, dado qualquer real $r \neq 1$,
   (vii) $a^n - b^n$ é divisível por $a - b$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$, dados quaisquer reais a, b,
   (viii) $7^{n+1} - 6n - 7$ é divisível por 36, para qualquer $n \in \mathbf{N}$.
2. Problemas envolvendo indução:
   (i) Considere a proposição, $P(n)$, "$2^n < n!$" para cada $n \in \mathbf{N}$.
      (a) Mostre que é hereditária (se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira);
      (b) Será que $P(n)$ é verdadeira para algum n?
      (c) O que é que é, de facto, verdade acerca de $2^n < n!$?
   (ii) Considere a proposição, $P(n)$, "$n^2 + 3n + 1$ é par" para cada $n \in \mathbf{N}$.
      (a) Mostre que é hereditária (se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira);
      (b) Será que $P(n)$ é verdadeira para algum n?
      (c) Mostre que a proposição, $Q(n)$, "$n^2 + 3n + 1$ é ímpar" para todo o $n \in \mathbf{N}$ é verdadeira para todos os $n \in \mathbf{N}$.
3. Somas telescópicas:
   (i) Seja u_n uma sucessão de números reais. Mostre que
   $$\sum_{i=1}^{n} (u_i - u_{i-1}) = u_n - u_0.$$
   (ii) Use o resultado anterior para calcular
   $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)}.$$
4. Mostrar (por indução, mais uma vez) que:
   (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}\,;$
   (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(3k-1) = n^2(n+1)\,;$
   (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+2) = \frac{(n-1)n(n+4)}{3}\,;$
   (iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = n\,2^{n+1}\,;$
   (v) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}\,;$
   (vi) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}\,;$
   (vii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+1)3^k = n\,3^{n+1}\,;$
   (viii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}\,.$