Álgebra Linear

Exame — segunda época

10.02.2023
Sala 0-65
10:30

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

1. Considere a base ordenada $\boldsymbol{\beta} = ((1,0,-1),(1,1,1),(1,0,0))$, de $\mathbb{R}^3$. Determine o vector de coordenadas $(a,b,c)_{\beta}$ do vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ na base $\boldsymbol{\beta}$.

2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   (a) O vector $(1,1,1,1)$ pertence ao espaço das colunas de A? **Justifique!**

   (b) Qual a dimensão do espaço das linhas de B?

   (c) Indique, **justificando**, a dimensão de $\mathrm{EL}(A) \cap \mathrm{EL}(B)$ (a intersecção dos espaços das linhas de A e B).

   (d) Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha o maior número possível de linhas da matriz A.

3. Dados dois vectores $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaçam $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$ e $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1$, eles constituem sempre uma base de $\mathbb{R}^2$. **Justifique!**

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & d \end{bmatrix}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

   (a) Caracterize (através de uma condição envolvendo a,b,c,d) as matrizes A que são invertíveis.

   (b) Determine a entrada $2,2$ da inversa de A (no caso de A ser invertível).

5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   e suponha que $A = [T]_{\beta}$ é a representação matricial de uma transformação linear $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$, na base ordenada $\boldsymbol{\beta} = (1, 1+t, t^2)$ de $\mathbb{R}_2[t]$.

   (a) Determine uma base para $\mathrm{Nuc}(A)$ (o núcleo de A)

   (b) A transformação T é injectiva? **Justifique!**

   (c) Determine $\mathrm{Im}(T)$ (a imagem de T) e a respectiva dimensão.

   (d) A equação $T(p(t)) = t$ é possível? **Justifique!**

continua no verso

6. Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ uma matriz cujo polinómio característico é

$$c_A(t) = -(t+1)(t-1)(t-2).$$

   (a) **Justifique** que A é diagonalizável.

   (b) **Justifique** que A é invertível e exprima A^{-1} em termos de uma combinação linear de potências de A.

   (c) Supondo que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   indique $E_A(2)$ (o espaço próprio associado ao valor próprio 2.

7. Verifique se a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por:

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2,$$

   é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

8. Considere o produto interno canónico em $\mathbb{R}^3$ e

$$W = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\} \leq \mathbb{R}^3.$$

   (a) Determine uma base ortogonal de W.

   (b) Determine $W^{\perp}$ (o complemento ortogonal de W).

9. Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^{4\times 4}$ onde se considera o produto interno $\langle A, B \rangle = A^{\top} B$. Sejam ainda:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Proj}_{W^{\perp}} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Qual é a matriz em W que se encontra à menor distância de A?

10. Sejam A uma matriz simétrica ($A = A^{\top}$) e $\alpha \neq \beta$ dois valores próprios de A. Mostre que se $\mathrm{u} \in E_A(\alpha)$ e $\mathrm{w} \in E_A(\beta)$ então u e w são ortogonais.

FIM!

Resolução

1. Temos apenas que resolver o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Escrevendo a matriz aumentada e recorrendo ao método de eliminação de Gauss, obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ -1 & 1 & 0 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & a-2b+c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b-c \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & a-2b+c \end{array}\right]$$

pelo que $(a, b, c)_\beta = (b - c, b, a - 2b + c)$.

2.(a) O sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

é impossível e assim $(1, 1, 1, 1) \notin \mathrm{EC}(A)$.

2.(b) Tem-se que $\dim \mathrm{EL}(B) = \mathrm{car}(B) = \dim \mathrm{EL}(B)$. Ora a dimensão do espaço das colunas de B, que é o número máximo de colunas de B linearmente independentes, vê-se sem dificuldade que é 2, pois uma das colunas é nula e as outras duas são independentes. Assim $\dim \mathrm{EL}(B) = 2$.

2.(c) O espaço das linhas de A tem a mesma dimensão do respectivo espaço das colunas. Vê-se facilmente que as duas primeiras colunas de A são linearmente independentes mas a terceira é uma combinação linear das duas primeiras: $A_{*,3} = -A_{*1} + A_{*,2}$. Assim, $\dim \mathrm{EL}(A) = \dim \mathrm{EC}(A) = 2$.

Podemos determinar facilmente a dimensão de $\mathrm{EL}(A) + \mathrm{EL}(B)$ procedendo à eliminação de Gauss da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

constatamos que tem característica 3 que corresponde a $\dim(\mathrm{EL}(A)+\mathrm{EL}(B))$. Recorrendo à fórmula da dimensão:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W),$$

concluímos que $\dim(\mathrm{EL}(A) \cap \mathrm{EL}(B)) = 1$.

2.(d) O número máximo de linhas linearmente independentes de A é dois, pelo que uma base de $\mathbb{R}^3$ pode incorporar no máximo duas linhas linearente independentes de A e.g., as linhas $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$.

Ora, as linhas da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são claramete independentes e, por isso, constituem uma base de $\mathbb{R}^3$ que contém os dois vectores acima.

3. A igualdade $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1$ implica que os vectores têm norma 1 e por isso não são nulos. A primeira igualdade: $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$ significa que, do ponto de vista do produto interno canónico em $\mathbb{R}^2$, os dois vectores são ortogonais. Concluímos então que são linearmente idependentes e, dois vectores linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$ constituem uma base daquele espaço.

4.(a) A matriz A é invertível se e só se o respectivo determinante for diferente de zero. Neste caso:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-b) = b-a,$$

pelo que A é invertível se e só se $a \neq b$.

4.(b) Recorrendo à fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Cof}(A))^\top,$$

concluímos que:

$$(A^{-1})_{2,2} = \frac{1}{|A|}\left((\mathrm{Cof}(A))^\top\right)_{2,2} = \frac{1}{|A|}\mathrm{cof}_{2,2}(A) = \frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{ad-bc}{b-a}.$$

5.(a) Tem-se que $\mathrm{Nuc}(A)$ é o conjunto solução do sistema $A\mathrm{x} = \mathbb{0}$. Procedendo à eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Concluindo-se que

$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc}(A) &= \{(x,y,z) \mid x = z, y = -z\} = \{(z,-z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \\ &= L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,-1,1\}). \end{aligned}$$

5.(b) A transformação é injectiva se e só se o seu núcleo é trivial, o que acontece se e só se o núcleo de uma qualquer das suas representações matriciais é trivial. Neste caso, o núcleo de $A = [T]_\beta$ não é, como vimos na resolução de 5.(a), trivial pelo que podemos concluir: T não é injectiva.

5.(c) A dimensão da imagem de T pode ser calculada através de uma qualquer representação matricial de T, em particular a partir da matriz A. Tem-se:

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{EC}(A)) = 3 - \mathrm{nul}(A) = 3 - 1 = 2.$$

Por outro lado, tem-se (considerando a eliminação de Gauss efectuada na resolução de 5.(a)) que $\mathrm{EC}(A) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,-1),(2,1,3)\})$, pelo que:

$$\mathrm{Im}(T) = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{(1,0,-1)^\beta,(2,1,3)^\beta\}) = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{1-t^2, 3+t+3t^2\}).$$

5.(d) Em termos de coordenadas na base $\boldsymbol{\beta}$ tem-se que

$$T(p(t)) = t \Leftrightarrow A\mathrm{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resovendo o sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

concluímos que é impossível, pelo que a equação $T(p(t)) = t$ é também ela impossível.

6.(a) A matriz A é diagonalizável porque qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com n valores próprios distintos é diagonalizável. Neste caso $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ possui os valores próprios $-1, 1$ e 2.

6.(b) Uma matriz quadrada é invertível se e só se o seu núcleo for trivial, o que equivale a dizer que 0 não é valor próprio de A, o que acontece neste caso. Por outro lado, pelo. teorema de Cayley-Hamilton, uma matriz é sempre uma raíz do respectivo polinómio característico i.e., $c_A(A) = \mathbb{0}$.

Neste caso,

$$\begin{aligned} c_A(t) &= -(t+1)(t-1)(t-2) = -(t^2-1)(t-2) = \\ &= -(t^3-2t^2-t+2) = \\ &= -t^3+2t^2+t-2, \end{aligned}$$

pelo que $-A^3 + 2A^2 + A - 2\mathbb{1} = \mathbb{0}$, ou seja, $(-A^2 + 2A + \mathbb{1})A = 2\mathbb{1}$, concluindo-se que:

$$\left(\frac{1}{2}\big(-A^2 + 2A + \mathbb{1}\big)\right)A = \mathbb{1},$$

e assim:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\big(-A^2 + 2A + \mathbb{1}\big).$$

6.(c) Tem-se que $E_A(2) = L_{\mathbb{R}^3}(\{0, 1, 0\})$.

7. A matriz de Gram associada à função indicada, relativa à base canónica de $\mathbb{R}^2$, é:

$$G = \begin{bmatrix} \langle (1,0),(1,0)\rangle & \langle (1,0),(1,0)\rangle \\ \langle (0,1),(1,0)\rangle & \langle (0,1),(0,1)\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

É claro que os valores próprios desta matriz (1 e -1) não são todos > 0 e por isso, a função indicada não é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

8.(a) Tem-se que

$$W = \{(x, y, x+2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,1).(0,1,2)\}).$$

Para obter uma base ortogonal deste espaço, recorremos ao algoritmo de Gram-Schmidt, para ortogonalizar a base $\{(1,0,1).(0,1,2)\}$. Considerando então $\mathrm{u}_1 = (1,0,1)$ e $\mathrm{u}_2 = (0,1,2)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathrm{u}_1^* &= (1,0,1); \\ \mathrm{u}_2^* &= (0,1,2) - \frac{\langle (0,1,2),(1,0,1)\rangle}{\langle (1,0,1),(1,0,1)\rangle}(1,0,1). \end{aligned}$$

Sendo $\{\mathrm{u}_1^*, \mathrm{u}_2^*\}$ a base ortogonal pretendida.

8.(b) Tem-se:

$$\begin{aligned} W^\perp &= \{(x,y,z) \mid \langle (x,y,z),(1,0,1)\rangle = 0, \langle ((x,y,z),(0,1,2)\rangle = 0\} = \\ &= \{(x,y,z) \mid x+z=0, y+2z=0\} = \{(-z,-2z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \\ &= L_{\mathbb{R}^3}(\{(-1,-2,1)\}). \end{aligned}$$

9. A matriz pretendida é a matriz:

$$\text{Proj}_W A = A - \text{Proj}_{W^\perp} A.$$

(Basta então fazer as contas.)

10. Como não se diz nada, as convenções adoptadas forçam-nos a considerar o produto interno canónico. Observe-se que para qualquer matriz quadrada A se tem (no caso do p.i. canónico)

$$\langle A\mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = (A\mathrm{x})^\top \mathrm{y} = \mathrm{x}^\top A^\top \mathrm{y} = \langle \mathrm{x}, A^\top \mathrm{y}\rangle.$$

Neste caso, temos $A^\top = A$, $A\mathrm{x} = \alpha\mathrm{x}$ e $A\mathrm{y} = \beta\mathrm{y}$. Assim,

$$\alpha\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \langle \alpha\mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \langle A\mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \langle \mathrm{x}, A^\top \mathrm{y}\rangle = \langle \mathrm{x}, A\mathrm{y}\rangle = \langle \mathrm{x}, \beta\mathrm{y}\rangle = \beta\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle.$$

Da igualdade $\alpha\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \beta\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle$ resulta que

$$(\alpha - \beta)\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = 0$$

e, como $\alpha - \beta \neq 0$ concluímos que $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = 0$ ou seja $\mathrm{x} \perp \mathrm{y}$.