DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Álgebra Linear

Exame (primeira época)

A

26.01.2023
Sala 0-65
13:00

Nome

Número

Questão	Cotação	Classificação
1.	1.0	
2.(a)	1.0	
2.(b)	0.5	
3.(a)	0.5	
3.(b)	1.0	
3.(c)	1.0	
4.(a)	0.5	
4.(b)	1.0	
4.(c)	1.0	
5.	0.5	
	TOTAL	

Enunciado

1. Considere a matriz invertível
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$
Determine o valor de k para o qual se tem:
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1+5c_1 & 2b_2+5c_2 & 2b_3+5c_3 \\ 7c_1 & 7c_2 & 7c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & 3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   (a) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
   (b) A é diagonalizável? **Justifique!**

3. Suponha que $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ satisfaz:
$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc}(A+2\mathbb{1}) &= L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,1,0,0),(1,-1,0,0)\}) \\ \mathrm{Nuc}(A+3\mathbb{1}) &= L_{\mathbb{R}^4}(\{(0,0,1,0),(0,0,1,1)\}). \end{aligned}$$
   (a) Indique o polinómio característico de A.
   (b) Justifique que A é diagonalizável.
   (c) Indique matrizes, P invertível e D diagonal tais que $D = P^{-1}AP$.

4. Seja
$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = 4x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$
uma função que associa a cada par de vectores em $\mathbb{R}^3$ um número real.
   (a) Mostre que $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.
   (b) Relativamente ao produto interno descrito na alínea (a) determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Continuando a considerar o produto interno descrito na alínea (a), indique o vector do complemento ortogonal da recta gerada pelo vector $(1,-1,0)$ que se encontra à menor distância do vector $(1,1,1)$.

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que A e $A^\top$ têm o mesmo polinómio característico.

Resolução da versão A

1. Por um lado temos que

$$k\begin{vmatrix}3a_1 & 3b_1 & 3c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} = 3k|A^\top| = 3k|A|.$$

Por outro lado,

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 2b_1+5c_1 & 2b_2+5c_2 & 2b_3+5c_3\\ 7c_1+7c_2 & 7c_3 & \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 2b_1+5c_1 & 2b_2+5c_2 & 2b_3+5c_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$$= 7\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} = 14|A|.$$

Como $|A| \neq 0$ (pois A é invertível) da igualdade $14|A| = 3k|A|$ resulta imediatamente que $14 = 3k$, ou seja, $k = 14/3$.

2.(a) O polinómo característico de A é:

$$\begin{aligned}c_A(t) &= \begin{vmatrix}1-t & -1 & 0\\ 1 & -t & 1\\ 0 & 1 & 1-t\end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix}-t & 1\\ 1 & 1-t\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1-t\end{vmatrix} =\\ &= (1-t)[t(t-1)-1] - (t-1) =\\ &= (1-t)[t(t-1)-1+1] = -t(t-1)^2.\end{aligned}$$

Deste modo os valores próprios de A são 0 com multiplicidade algébrica 1 e 1 com multiplicidade algébrica 2.

2.(b) Como $\mathrm{m_{geo}}(0) = 1$. Para decidirmos se a matriz é ou não diagonaçlizável basta então verificar se $\mathrm{m_{geo}}(1) = 2$ ou $\mathrm{m_{geo}}(1) = 1$ (no primeiro caso será diagonalizável, no segundo não).

Tem-se que:

$$E_A(1) = \mathrm{Nuc}(A - \mathbb{1}) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Como esta matriz tem nulidade 1 concluímos que a multiplicidade geométrica do valor próprio 1 é < 2 logo a matriz não é diagonalizável.

3.(a) O polinómio característico tem grau 4 e, como -2, -3 são valores próprios com multiplicidades geométrica iguais a 2, resulta que $c_A(t)$ é divisível pelo polinómio $(t+2)^2(t+3)^2$. No entanto, como este polinómio tem grau 4, ele tem que ser necessariamente o polinómio característio:

$$c_A(t) = (t+2)^2(t+3)^2.$$

3.(b) Como $\mathrm{m_{geo}}(-2) + \mathrm{m_{geo}}(-3) = 4$ podemos formar uma base de $\mathbb{R}^4$ que consiste de vectores próprios e, portanto, a matriz é diagonalizável.

3.(c)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

4.(a) Calculando a matriz de Gram, G, obtemos:

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Constata-se sem dificuldade que

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado a matriz G é simétrica ($G = G^\top$). Calculando o polinómio característico de G tem-se:

$$c_G(t) = \begin{vmatrix} 4-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} 4-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} =$$

$$= (1-t)[(4-t)(1-t) - 1] = -(t-1)[(t-1)(t-4) - 1] =$$
$$= -(t-1)(t^2 - 5t + 3).$$

Recorrendo à fórmula resolvente não é difícil constatar que as raízes deste polinómio são todas positivas. Estes três factos, justificam que a função dada é um produto interno.

4.(b) Consideremos uma base de $\mathbb{R}^3$, por exemplo, a base canónica

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1).$$

Aplicando-lhe o algoritmo de eliminação de Gauus podemos obter uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Temos então:

$$e_1^* = (1,0,0);$$

$$e_2^* = (0,1,0) - \frac{e_2^\top G e_1^*}{(e_1^*)^\top G e_1^*}(1,0,0) = (0,1,0);$$

$$e_3^* = (0,0,1) - \frac{e_3^\top G e_1^*}{(e_1^*)^\top G e_1^*}(1,0,0) - \frac{e_3^\top G e_2^*}{(e_2^*)^\top G e_2^*}(0,1,0) = (0,0,1) - \frac{1}{4}(1,0,0)$$

Podemos então considerar a base ortogonal

$$\boldsymbol{\beta} = ((1,0,0),(0,1,0),(1,0,4)).$$

4.(c) A recta gerada pelo vector $(1,-1,0)$ é o espaço $W = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,-1,0)\})$. O elemento que se encontra mais próximo de $(1,1,1)$ em $W^\perp$ é a projecção ortogonal de $(1,1,1)$ sobre $W^\perp$. Tem-se então,

$$\mathrm{Proj}_{W^\perp}(1,1,1) = (1,1,1) - \mathrm{Proj}_W(1,1,1) =$$

$$= (1,1,1) - \frac{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} G \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix} G \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}}(1,-1,0).$$

5. Tem-se que

$$c_{A^\top}(t) = |A^\top - t\mathbb{1}| = |A^\top - t\mathbb{1}^\top| = |(A - t\mathbb{1})^\top| = |A - t\mathbb{1}| = c_A(t).$$

DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Álgebra Linear

Exame (primeira época)

B

26.01.2023
Sala 0-65
13:00

Nome

Número

Questão	Cotação	Classificação
1.	1.0	
2.(a)	1.0	
2.(b)	0.5	
3.(a)	0.5	
3.(b)	1.0	
3.(c)	1.0	
4.(a)	0.5	
4.(b)	1.0	
4.(c)	1.0	
5.	0.5	
	TOTAL	

Enunciado

1. Considere a matriz invertível
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$
Determine o valor de k para o qual se tem:
$$\begin{vmatrix} 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \\ 2b_1+5c_1 & 2b_2+5c_2 & 2b_3+5c_3 \\ 7c_1 & 7c_2 & 7c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & 3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   (a) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
   (b) A é diagonalizável? **Justifique!**

3. Suponha que $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ satisfaz:
$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc}(A - \mathbb{1}) &= L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,1,0,0),(1,-1,0,0)\}) \\ \mathrm{Nuc}(A + \mathbb{1}) &= L_{\mathbb{R}^4}(\{(0,0,1,0),(0,0,1,1)\}). \end{aligned}$$
   (a) Indique o polinómio característico de A.
   (b) Justifique que A é diagonalizável.
   (c) Indique matrizes, P invertível e D diagonal tais que $D = P^{-1}AP$.

4. Seja
$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$
uma função que associa a cada par de vectores em $\mathbb{R}^3$ um número real.
   (a) Mostre que $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.
   (b) Relativamente ao produto interno descrito na alínea (a) determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Continuando a considerar o produto interno descrito na alínea (a), indique o vector do complemento ortogonal da recta gerada pelo vector $(1,-1,0)$ que se encontra à menor distância do vector $(1,1,1)$.

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que A e A^T têm o mesmo polinómio característico.