DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Enunciado

Álgebra Linear

Segundo MAP45

A

13.12.2022
Sala 0-65
18:15

Nome

Número

1. Considere $V = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,0,1,1),(1,1,0,0),(0,0,0,1)\} \leqslant \mathbb{R}^4$.

   (a) Justifique que $\beta = ((1,0,1,1),(1,1,0,0),(0,0,0,1))$ é uma base ordenada de V.

   (b) Verifique que $(0,-1,1,1) \in V$ e determine o vector de coordenadas deste vector na base β.

   (c) Indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vectores de β.

2. Considere os subespaços $U, W \leqslant \mathbb{R}_3[t]$ definidos por:

$$U = L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}(\{t+t^2, 1-t^3\})$$

$$W = L_{\mathbb{R}_3[t]}(\{1-t-t^2-t^3, t^3\}).$$

   Determine a dimensão de $U \cap W$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que, relativamente às bases ordenadas $\beta = ((0,1),(-1,1))$ de $\mathbb{R}^2$ e $\bar{\beta} = ((0,1,0),(1,0,0),(0,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = [T]_{\bar{\beta},\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Indique a matriz que representa T relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

   (b) Justifique que T é injectiva.

   (c) Indique um vector (x,y,z) tal que $(x,y,z) \notin \mathrm{Im}(T)$.

4. Descreva uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ não nula, tal que $TT : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seja a transsformação linear nula. Em alternativa mostre que uma tal transformação não pode existir.

Questão	Cotação	Classificação
1.(a)	1.0	
1.(b)	1.0	
1.(c)	0.5	
2	0.5	
3.(a)	1.0	
3.(b)	1.0	
3.(c)	0.5	
4.	0.5	
	TOTAL	

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Enunciado

Álgebra Linear

Segundo MAP45

B

13.12.2022
Anfiteatro A2
18:15

Nome

Número

Questão	Cotação	Classificação
1.(a)	1.0	
1.(b)	1.0	
1.(c)	0.5	
2	0.5	
3.(a)	1.0	
3.(b)	1.0	
3.(c)	0.5	
4.	0.5	
	TOTAL	

1. Considere $V = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,0,1,0),(1,1,0,0),(0,0,0,1)\} \leqslant \mathbb{R}^4$.
   (a) Justifique que $\boldsymbol{\beta} = ((1,0,1,0),(1,1,0,0),(0,0,0,1))$ é uma base ordenada de V.
   (b) Verifique que $(0,-1,1,1) \in V$ e determine o vector de coordenadas deste vector na base $\boldsymbol{\beta}$.
   (c) Indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vectores de $\boldsymbol{\beta}$.

2. Considere os subespaços $U, W \leqslant \mathbb{R}^{2\times 2}$ definidos por:
$$U = L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right)$$
$$W = L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$
   Determine a dimensão de $U \cap W$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que, relativamente às bases ordenadas $\boldsymbol{\beta} = ((0,1),(-1,1))$ de $\mathbb{R}^2$ e $\bar{\boldsymbol{\beta}} = ((0,1,0),(1,0,0),(0,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:
$$A = [T]_{\bar{\beta},\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Indique a matriz que representa T relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
   (b) Justifique que T é injectiva.
   (c) Indique um vector (x,y,z) tal que $(x,y,z) \notin \operatorname{Im}(T)$.

4. Descreva uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ não nula, tal que $TT : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seja a transsformação linear nula. Em alternativa mostre que uma tal transformação não pode existir.

Resolução da versão B

1.

(a) Os vectores de $\boldsymbol{\beta}$ já são um conjunto gerador de V, para que sejam uma base basta que sejam linearmente independentes isso acontece se e só se a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

for 3. Procedendo à eliminação de Gauss temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

constatando-se que $\operatorname{car}(A) = 3$.

(b) Tem-se que o vector $(0, -1, 1, 1) \in V$ se e só se o sistema $A\mathrm{x} = [0\ -1\ 1\ 1]^{\mathsf{T}}$ é possível e, nesse caso, a solução deste sistema é o vector de coordenadas de $(0, -1, 1, 1)$ na base $\boldsymbol{\beta}$. Tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Concluindo-se assim que $(0, -1, , 1, 1)_{\boldsymbol{\beta}} = (1, -1, 1)$.

(c) Uma vez que $\mathbb{R}^4$ tem dimensão 4 para obtermos uma base de $\mathbb{R}^4$ basta adicionar a $\boldsymbol{\beta}$ um vector linearmente independente dos vectores em β. Para isso basta escolher um vector de $\mathbb{R}^4$ que não seja elemento de V. Podemos obter um vector nestas condições de acordo com o o seguinte: considerando a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o nosso problema reduz-se então a determinar um vector que não pertença ao espaço das linhas de B. Procedendo à eliminação de Gauss obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note-se que os vectores correspondentes às linhas da matriz final também são uma base de V. Se adicionarmos a linha $(0, 0, 1, 0)$ a esta matriz a matriz resultante tem, como se constata imediatamente, característica 4. Ou seja este vector é linearmente independente dos vectores de uma base de V e assim não pode pertencer a V, como pretendíamos.

2. Considerando a base canónica, $\boldsymbol{\beta}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Podemos resolver o problema correspondente para coordenadas i.e.,

$$U_\beta = L_{\mathbb{R}^4}(\{(0,1,1,0),(1,0,0,-1)\}),$$
$$W_\beta = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,-1,-1,-1),(0,0,0,1)\}),$$

pelo que, para determinar $U_\beta \cap W_\beta$ começamos por determinar o núcleo da matriz:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Feita a eliminação de Gauss pode constatar-se que

$$\mathrm{Nuc}([A|B]) = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,-1,1,0)\})$$

Tem-se então que

$$U_\beta \cap W_\beta = L_{\mathbb{R}^4}\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}\right) = L_{\mathbb{R}^4}(\{(-1,1,1,1)\}).$$

Tem-se então que:

$$U \cap W = (U_\beta \cap W_\beta)^\beta = L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\left(\left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

A dimensão desta intersecçaõ é então 1. Note-se que para determinar esta dimensão não era necessário calcular explicitamente $U \cap W$ dado que $\dim(U \cap W) = \dim(U_\beta \cap W_\beta)$.

3.

(a) Designando por $\boldsymbol{\beta}_c^2$ e $\boldsymbol{\beta}_c^3$ as bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Tem-se que:

$$[T]_{\boldsymbol{\beta}_c^3,\boldsymbol{\beta}_c^2} = [\boldsymbol{\beta}_c^3, \bar{\boldsymbol{\beta}}][T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\beta}}[\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_c^2]$$

ou seja,

$$[T]_{\boldsymbol{\beta}_c^3,\boldsymbol{\beta}_c^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Usando a representação matricial, a dimensão do núcleo de T coincide com a dimensão do núcleo dessa representação. Assim

$$\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = \mathrm{nul}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

pois, como se constata facilmente, a característica da matriz é 2 e assim a nulidade (dimensão do núcleo) que é a diferença entre o número de colunas e a característica, é 0.

Como o núcleo de T é trivial, tem-se que T é injectiva.

(c) A imagem de T é gerada pelas imagens dos vectores da base $\boldsymbol{\beta}$ através de T. Esseas imagens são precisamente as colunas de $[T]_{\boldsymbol{\beta}_c^3,\boldsymbol{\beta}_c^2}$ ou seja,

$$\mathrm{Im}(T) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(-1,-1,-1),(0,1,0)\}) == L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,1),(0,1,0)\}).$$

Constata-se sem dificuldade que o vector $(0,0,1)$ é linearmente independente daqueles dois vectores (a matriz constituída por estes três vectores tem característica 3) pelo que não pode pertencer ao espaço por eles geardo ou seja o espaço $\mathrm{Im}(T)$.

4. Consideremos, por exemplo, a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(1,0) = (0,0)$ e $T(0,1) = (1,0)$. Relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$ a representação matricial de T é a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A transformação T não é nula e a representação matricial de TT relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é a matriz A^2 que é a matriz nula. Assim TT é a transformação nula, como se pretendia.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Álgebra Linear

Segundo MAP45

C

20.12.2022
Sala 0-32
15:00

Nome

Número

Questão	Cotação	Classificação
1.(a)	1.0	
1.(b)	1.0	
1.(c)	0.5	
2	0.5	
3.(a)	1.0	
3.(b)	1.0	
3.(c)	0.5	
4.	0.5	
	TOTAL	

Enunciado

1. Considere $V = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,0,1,1),(1,1,0,0),(1,2,-1,-1)\} \leqslant \mathbb{R}^4$.

   (a) Determine uma base ordenada, $\boldsymbol{\beta}$, de V.

   (b) Verifique que $(2,1,2,2) \in V$ e determine o vector de coordenadas deste vector na base $\boldsymbol{\beta}$.

   (c) Indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua os vectores de $\boldsymbol{\beta}$.

2. Considere os subespaços $U, W \leqslant \mathbb{R}_3[t]$ definidos por:

$$U = L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}(\{t+t^2, 1+t^3\})$$

$$W = L_{\mathbb{R}_3[t]}(\{1+t+t^2+t^3, t^3\}).$$

   Determine a dimensão de $U \cap W$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que, relativamente às bases ordenadas $\boldsymbol{\beta} = ((1,1),(-1,1))$ de $\mathbb{R}^2$ e $\bar{\boldsymbol{\beta}} = ((0,1,0),(1,0,0),(1,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = [T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine a matriz que representa T relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

   (b) Justifique que T é injectiva.

   (c) Indique uma base para a imagem de T.

4. Suponha que $\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\}$ é uma base do espaço linear V. Nestas condições, mostre que $\{\mathrm{u}-\mathrm{v}, \mathrm{u}+\mathrm{v}\}$ também é uma base desse espaço.

Resolução da questão 4, da versão C

4. Se $\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\}$ é uma base de V então $\dim V = 2$. Desta forma para verificar se $\{\mathrm{u}-\mathrm{v}, \mathrm{u}+\mathrm{v}\}$ é uma base de V basta verificar se este conjunto de vectores é linearmente independente. Tem-se que:

$$\begin{aligned}\alpha(\mathrm{u}-\mathrm{v}) + \beta(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = \mathbb{0} \equiv \alpha\mathrm{u} - \alpha\mathrm{v} + \beta\mathrm{u} + \beta\mathrm{v} = \mathbb{0} \equiv \\ \equiv (\alpha+\beta)\mathrm{u} + (-\alpha+\beta)\mathrm{v} = \mathbb{0}\end{aligned}$$

que, como u, v são linearmente independentes, equivale a dizer que

$$\begin{cases}\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0\end{cases} .$$

Este sistema tem como solução única a solução $\alpha = 0, \beta = 0$, comprovando-se assim que os vectores $\mathrm{u}-\mathrm{v}, \mathrm{u}+\mathrm{v}$ são linearmente independentes e assim, constituem uma base de V.