DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Álgebra Linear

Primeiro MAP45

A

18.10.2022
Anfiteatro A2
18:15

Nome

Número

Questão	Cotação	Classificação
1.(a)	0.5	
1.(b)	0.5	
1.(c)	0.5	
1.(d)	1.0	
2	1.5	
3.(a)	1.0	
3.(b)	0.5	
4	0.5	
	TOTAL	

Enunciado

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e seja $D = ABC$.

(a) Indique o tipo da matriz D.

(b) Determine a entrada $D_{1,1}$.

(c) Resolva em ordem a X a equação $(3X^{-1})^{\mathsf{T}} = A$.

(d) Verifique se o vector $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ é uma combinação linear das colunas de A. Em caso afirmativo, indique os coeficientes de uma dessas combinações lineares.

2. Classifique quanto à existência de soluções e em função dos parâmetros α e β o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ onde

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine matrizes elementares E_1, E_2, E_3, E_4 tais que:

$$E_4E_3E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) A é invertível? **Justifique!**

4. Considere $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Suponha que

$$E^{(2,1)}E^{(2,1)}(2)E^{(3,2)}(-1)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Indique $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ tal que o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ seja impossível.

Correcção

Apresenta-se a correcção da versão A, dado que as outras versões diferiam desta apenas em valores numéricos. No caso da pergunta 3.(a), aceitaram-se como correctas todas as respostas em que foi indicada uma sequência de matrizes elementares $E_n, \dots, E_2, E_1$ tal que

$$E_n \cdots E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

para um n qualquer e não apenas para $n = 4$, como pedido inicialmente no enunciado.

1. (a) Estamos perante um produto de martrizes do tipo

$$(4 \times 4)(4 \times 2)(2 \times 4) = (4 \times 2)(2 \times 4) = (4 \times 4).$$

Pelo que a matriz D é do tipo (4×4).

(b) Tem-se que:

$$\begin{aligned} D_{1,1} &= (AB)_{1,*} C_{*,1} \\ &= (1 \cdot [1\ 2] + 0 \cdot [3\ 1] + 1 \cdot [0; 2] + 2 \cdot [0\ 0]) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [1\ 4] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 7. \end{aligned}$$

(c) Tem-se que:

$$\begin{aligned} (3X^{-1})^\top = A \Leftrightarrow 3(X^{-1})^\top = A \Leftrightarrow 3(X^\top)^{-1} = A \Leftrightarrow \\ X^\top = \left(\tfrac{1}{3}A\right)^{-1} \Leftrightarrow X^\top = 3A^{-1} \Leftrightarrow X = 3\left(A^{-1}\right)^\top. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\left(A^{1-}\right)^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(d) O vector $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ é uma combinação linear das colunas de A se e só se o sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

for possível. O sistema é sempre possível (e determinado) porque a matriz dos coeficientes (a matriz A) é invertível. Tem-se além disso que a solução é

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As solução deste sistema é a lista de coeficiente pretendida.

2. Procedendo à eliminação de Gauss tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & \beta \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & \beta \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha+1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & \beta \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha+1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \beta-1 \end{array}\right]$$

Assim, se $\alpha \neq 0$ o sistema é possível e determinado. Se $\alpha = 0$ então:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \beta-1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right]$$

e o sistema é indeterminado se $\beta = 0$ e é impossível se $\beta \neq 0$.

3.

(a) Procedendo à eliminação de Gauss obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow 2L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, podemos considerar:

$$E_1 = E^{(2,1)}(-1),\ E_2 = E^{(2,3)},\ E_3 = E^{(3,2)}(-2),\ E_4 = E^{(2,3)}(1).$$

(b) A resposta é afirmativa pois a característica de A é máxima $(= 3)$.

4. Designando por B a matrix:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o sistema $B\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ é claramente impossível. Tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top = B\mathrm{x} = E^{(2,3)}(1)E^{(3,2)}(-2)E^{(2,3)}E^{(2,1)}(-1)A\mathrm{x}$$

e este sistema é equivalente a:

$$A\mathrm{x} = \left(E^{(2,3)}(1)E^{(3,2)}(-2)E^{(2,3)}E^{(2,1)}(-1)\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que por isso é impossível. Bastaria agora fazer em contas tendo em conta que:

$$\left(E^{(2,3)}(1)E^{(3,2)}(-2)E^{(2,3)}E^{(2,1)}(-1)\right)^{-1} = E^{(2,1)}(1)E^{(2,3)}E^{(3,2)}(2)E^{(2,3)}(-1).$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Enunciado

Álgebra Linear

Primeiro MAP45

B

18.10.2022
Anfiteatro A2
18:15

Nome

Número

Questão	Cotação	Classificação
1.(a)	0.5	
1.(b)	0.5	
1.(c)	0.5	
1.(d)	1.0	
2	1.5	
3.(a)	1.0	
3.(b)	0.5	
4	0.5	
	TOTAL	

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e seja $D = BCA$.

(a) Indique o tipo da matriz D.

(b) Determine a entrada $D_{1,3}$.

(c) Resolva em ordem a X a equação $(2X^\top + \mathbb{1})^{-1} = A$.

(d) Verifique se o vector $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ é uma combinação linear das colunas de A. Em caso afirmativo, indique os coeficientes de uma dessas combinações lineares.

2. Classifique quanto à existência de soluções e em função dos parâmetros α e β o sistema $Ax = \mathrm{b}$ onde

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine matrizes elementares E_1, E_2, E_3, E_4 tais que:

$$E_4E_3E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) A é invertível? **Justifique!**

4. Considere $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Suponha que

$$E^{(2,1)}E^{(2,1)}(2)E^{(3,2)}(-1)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Indique $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ tal que o sistema $Ax = \mathrm{b}$ seja impossível.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Álgebra Linear

Primeiro MAP45

C

18.10.2022
Anfiteatro A2
18:15

Nome

Número

Questão	Cotação	Classificação
1.(a)	0.5	
1.(b)	0.5	
1.(c)	0.5	
1.(d)	1.0	
2	1.5	
3.(a)	1.0	
3.(b)	0.5	
4	0.5	
	TOTAL	

Enunciado

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e seja $D = CAB$.

(a) Indique o tipo da matriz D.

(b) Determine a entrada $D_{3,1}$.

(c) Resolva em ordem a X a equação $(X^T + 2\mathbb{1})^{-1} = A$.

(d) Verifique se o vector $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ é uma combinação linear das colunas de A. Em caso afirmativo, indique os coeficientes de uma dessas combinações lineares.

2. Classifique quanto à existência de soluções e em função dos parâmetros α e β o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ onde

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine matrizes elementares E_1, E_2, E_3, E_4 tais que:

$$E_4E_3E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) A é invertível? **Justifique!**

4. Considere $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Suponha que

$$E^{(2,1)}E^{(2,1)}(2)E^{(3,2)}(-1)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Indique $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ tal que o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ seja impossível.