Miniteste 09

AL8—Versão A (2,4,6,8)
27.01.2022–08:00

1 [$3 \times 0,3$ val.] Seja A uma matriz real diagonalizável cujo polinómio característico é

$$c_A(t) = (t-1)^2 t(t+1).$$

(a) Indique o polinómio mínimo de A.

(b) Indique se A é invertível (**sim** ou **não**).

(c) Indique as dimensões de $\mathrm{Nuc}(A - \mathbb{1})$ e de $\mathrm{Nuc}(A - 2\mathbb{1})$.

2. [$0,5 + 0,6$ val.] Em $\mathbb{R}^2$ considere o produto interno definido por:

$$\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = 2u_1v_1 - 2u_1v_2 - 2u_2, v_1 + 3u_2v_2.$$

(a) Determine (x, y) tal que o ângulo entre (x, y) e $(0, 1)$ seja $\pi/2$.

(b) Indique a distância entre os vectores $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

Resolução

1.

(a) Se a matriz é diagonalizável então $m_A(t)$ tem os mesmos factores irredutíveis que $c_A(t)$ mas sem repetições i.e.,

$$m_A(t) = (t-1)t(t+1).$$

(b) Como 0 é valor próprio de A tem-se que A não é invertível.

(c) Como $\mathrm{Nuc}(A - \mathbb{1}) = E_A(1)$, a matriz A é diagonalizável e $\mathrm{m_{alg}}(1) = 2$ tem que se ter $\dim(A - \mathbb{1}) = 2$. Como 2 não é valor próprio de A, tem-se que $\dim(A - 2\mathbb{1}) = 0$.

2.

(a) Relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$ o produto interno descrito é representado pela matriz Gram:

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

O ângulo entre (x, y) e $(0, 1)$ é $\pi/2$ exactamente quando $\langle (x, y), (0, 1) \rangle = 0$. Ou seja, se e só se,

$$0 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = -2x + 3y,$$

pelo que qualquer vector da forma $(x, 2x/3)$ é ortogonal a $(0, 1)$.

(b) A distância entre os vectores $(1, 0)$ e $(1, 1)$ é a norma do vector $(1, 1) - (1, 0)$ ou seja, $\|(0, 1)\|$.

$$\|(0, 1)\| = \langle (0, 1), (0, 1) \rangle = \sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} =$$

$$= \sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}} = \sqrt{3}.$$