Miniteste 08

AL8—Versão A (2,3,6,7)
20.01.2022–08:00

1. [4×0.2 val.] Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ cujo polinómio característico é

$$c_A(t) = -t^3 - 6t^2 - 11t - 6$$

   (a) **Justifique** que -1 é valor próprio de A.

   (b) Indique todos os valores próprios de A.

   (c) A matriz A é invertível? **(Assinale a opção correcta.)**
   (A) Sim. (B) Não. (C) Não se pode concluir nada.

   (d) A matriz A é diagonalizável? **(Assinale a opção correcta.)**
   (A) Sim. (B) Não. (C) Não se pode concluir nada.

2. [$0.6 + 0.6$ val.] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   1. Mostre que 1 é valor próprio de A com multiplicidade algébrica 2.
   2. Determine $E_A(1)$ (o espaço próprio associado ao valor próprio 1).

Resolução

1.

(a) Calculando verifica-se que $c_A(-1) = 0$, pelo que -1 é raíz do polinómio característico e assim é um valor próprio.

(b) Como -1 é raíz de $c_A(t)$ tem-se que $c_A(t)$ é divisível por $(t+1)$, ou seja, $c_A(t) = (t+1)q(t)$. O polinómio $q(t)$ que é de grau 2 pode ser obtido pela regra de Ruffini, aplicando a fórmula resolvente a $q(t)$ constata-se que:

$$c_A(t) = -(t+1)(t+2)(t+3)$$

Assim, os valores próprios de A são $-1, -2, -3$.

(c) Uma vez que 0 não é um valor próprio de A tem-se que A é invertível.

(d) A matriz é de ordem 3 e tem três valores próprios distintos pelo que é diagonalizável.

2.

2.1. O polinómio característico de A é $c_A(t) = (t-1)^2(t-2)$. Como o factor $(t-2)$ ocorre duas vezes na decomposição em factores irredutíveis de $c_A(t)$, tem-se $\mathrm{m}_{\mathrm{alg}}(2) = 2$.

2.2. Tem-se que

$$E_A(1) = \mathrm{Nuc}(A - \mathbb{1}) = \mathrm{Nuc}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0),(0,0,1)\}).$$