Miniteste 07

AL8—Versão A (2,3,6,7)
13.01.2022–08:00

1. [5 × 0.2 val.] Classifique cada uma das seguintes afirmações como **verdadeira** ou **falsa**.

(A) Se $\det(AB) = 2$ então A é invertível.

(B) Se A é invertível então $\mathrm{Adj}(A)$ (a adjunta de A) é invertível.

(C) Qualquer sistema da forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser resolvido usando a regra de Cramer.

(D) Se $AA^\top = \mathbb{1}$ então $\det(A) = \pm 1$.

(E) Se E é uma matriz elementar então $\det(E) = \pm 1$.

2. [1 val.] Considere,

$$A = \begin{bmatrix} 2a & b & 0 & 0 \\ 2c & d & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Indique o valor de $|A|$ expresso em função de α.

Resolução

2.

(A) Tem-se que $\det(AB) = 2$ é equivalente a $\det(A)\det(B) = 2$ e assim, $\det(A) \neq 0$ pelo que A é invertível. A afirmação é **verdadeira**.

(B) Tem-se que $A(\mathrm{Adj}\, A) = |A|\mathbb{1}$. Assim,

$$|A||\mathrm{Adj}\, A| = |A|^n,$$

onde n é a ordem da matriz. Ou seja,

$$|\mathrm{Adj}\, A| = |A|^{n-1}.$$

Como por hipótese $|A| \neq 0$ tem-se que $0 \neq |A|^{n-1} = |\mathrm{Adj}\, A|$. Assim, $\mathrm{Adj}(A)$ é invertível e a afirmação é **verdadeira**.

(C) A afirmação é **falsa**. A regra de Cramer só permite resolver sistemas de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é quadrada com determinante não nulo.

(D) Neste caso tem-se

$$\det(AA^\top) = \det(\mathbb{1}) \Leftrightarrow \det(A)\det(A^\top) = 1 \Leftrightarrow (\det\ A)^2 = 1.$$

Assim, $\det(A) = \pm 1$, pelo que a afirmação é **verdadeira**.

(E) A afirmação é **falsa**. Por exemplo, $\det(E^i(\alpha)) = \alpha$. Pelo que, se $\alpha \neq 1$, o determinante daquela matriz elementar não é 1.

2. Recorrendo ao desenvolvimento de Laplace tem-se:

$$\begin{vmatrix} 2a & b & 0 & 0 \\ 2c & d & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2a & b & 0 \\ 2c & d & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6\alpha.$$