Miniteste 06

AL8—Versão A (2,3,6,7)

16.12.2021–08:00

1. [1.0+0.5 val.] Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$ e $S : \mathbb{R}_2[T] \to \mathbb{R}^3$, transformações lineares que, relativamente às bases $\boldsymbol{\beta} = ((1,1,0),(1,-1,0),0,0,1))$, de $\mathbb{R}^3$, e $\bar{\boldsymbol{\beta}}$, a base canónica de $\mathbb{R}_2[t]$ são representadas pelas matrizes

$$A = [T]_{\bar{\beta},\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = [S]_{\beta,\bar{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Indique a matriz que representa a composição $ST : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Indique $ST(x,y,z)$.

2. [0.5 val.] **Sem calcular os determinantes**, mostre que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & g & a \\ e & h & b \\ f & i & c \end{vmatrix}.$$

1\.

(a) A matriz que representa $ST : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a matriz

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Uma vez que BA representa ST na base canónica de $\mathbb{R}^3$, onde os vectors coincidem com os respectivos vectores de coordenadas tem-se que:

$$ST(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (2x + 3y + 2z, 2x + y + 2z, x + 3y + z).$$

2\. Considerando que $\det(A^\top) = \det(A)$ e que trocando duas colunas ou duas linhas o determinante muda de sinal, tem-se:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}^\top = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g & d & a \\ h & e & b \\ i & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & g & a \\ e & h & b \\ f & i & c \end{vmatrix}.$$