Miniteste 05

AL8—Versão A (2,3,6,7)
9.12.2021–08:00

1. [0.3+0.4+0.3 val.] Considere os subespaços U, W de $\mathbb{R}^4$ definidos por:

$$U = \{(x, y, z, w) \mid x - y = 0 \wedge x + w = 0\}$$
$$W = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 0, 1, 1), (-1, 1, 0, 0)\})$$

Classifique como *verdadeira* ou *falsa* cada uma das afirmações seguintes:

(a) $U \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

(b) $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(c) Existe uma base de $\mathbb{R}^4$ cujos vectores não pertencem nem a U nem a W.

2. [0.3+0.4+0.3 val.] Considere transformações lineares $S, T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tais que $T(x, y) = (x, x + y, x - y)$, $S(1, 0) = (1, 1, 1)$ e $S(-1, 1) = (1, 0, 1)$.

(a) Indique a dimensão de $\operatorname{Im}(T)$;

(b) Indique a dimensão do $\operatorname{Nuc}(S)$;

(c) Tem-se $S = T$? **Justifique!**

1. Tem-se que

$$U = \{(x,y,z,w) \mid y = x \wedge w = -x\} = \{(x,x,z,-x) \mid x,z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,1,0,-1),(0,0,1,0)\}),$$

e $\{(1,1,0,1),(0,0,1,0)\}$ é uma base de U. Também é fácil verificar que os vectores $(1,0,1,1)$ e $(-1,1,0,0)$ constituem uma base de W. Desta forma $\dim(U) = \dim(W) = 2$.

Colocando as bases de U e W como linhas de uma matriz, obtemos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Procedendo à respectiva eliminação de Gauss constata-se que as linhas da matriz são linearmente independentes. Como o espaço das linhas desta matriz corresponde a $U + W$ constata-se que $\dim(U + W) = 4$. Neste caso, como

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W),$$

constatamos que $\dim(U \cap W) = 0$.

Desta forma as afirmações (a) e (b) são verdadeiras.

Os vectores em W são aqueles para os quais o sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 0 & w \end{array}\right]$$

é possível. Procedendo à eliminação de Gauss obtemos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 0 & w \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & z-x \\ 0 & 1 & w-x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-x-y \\ 0 & 0 & w-x-y \end{array}\right]$$

Ou seja $W = \{(x,y,z,w) \mid z = w = x + y\}$.

Temos então:

$$U = \{(x,y,z,w) \mid y = x \wedge w = -x\}$$
$$W = \{(x,y,z,w) \mid z = w = x + y\}.$$

Considerando, por exemplo, os vectores

$$(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1),$$

nenhum deles pertence a $U \cup W$ e constituem claramente uma base de $\mathbb{R}^4$ (a base canónica). A afirmação (c) é portanto verdadeira.

2.

(a) Tem-se que $\mathrm{Im}(T) = L_{\mathbb{R}^3}(\{T(1,0), T(0,1)\}) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,1),(0,1,-1)\})$. E como os vectores $(1,1,1)$ e $(0,1,-1)$ são linearmente independentes, conclui-se que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

(b) Como os vectores $\{(1,0),(-1,1)\}$ são uma base de $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im}(S) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,1),(1,0,1)\})$. Este vectores são linearmente independentes pelo que $\dim(\mathrm{Im}(S)) = 2$. Tem-se que:

$$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\mathrm{Im}(S)) + \dim(\mathrm{Nuc}(S))$$

pelo que $\dim(\mathrm{Nuc}(S)) = 0$.

(c) Duas transformações lineares se e só se transformam da mesma maneira os vectores de uma base do espaço de partida. Temos que $T(1,0) = (1,1,1)$ e $T(-1,1) = (-1,0,-2)$. Visto que $T(-1,1) \neq S(-1,1)$ tem-se que $S \neq T$.