Miniteste 04

AL8—Versão A (3,6,8,9)

11.11.2021–08:00

1. [0.5+0.5+0,5 val.]

Considere o subespaço de $\mathbb{R}^5$:

$$W = L_{\mathbb{R}^5}(\{(-1,1,1,1,0),(1,0,0,0,1),(-5,2,2,2,-3)\}).$$

1. Indique uma base de W.
2. Indique uma matriz A tal que $W = \mathrm{Nuc}(A)$.
3. Qual o número máximo de vectores de W que uma base de $\mathbb{R}^5$ pode conter? **Justifique!**

2. [0.5 val.]

Sejam, $\{u_1, u_2, u_3\}$ uma base do espaço linear V e $w_1, w_2 \in V$. Justifique que pelo menos um dos vectores u_1, u_2, u_3 não pertence a $L_V(\{w_1, w_2\})$.

Consideremos a matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|c} -1 & 1 & -5 & x \\ 1 & 0 & 2 & y \\ 1 & 0 & 2 & z \\ 1 & 0 & 2 & w \\ 0 & 1 & -3 & u \end{array}\right]$$

Esta matriz descreve um sistema na variáveis, digamos, α, β, γ do qual é possível extrair a seguinte informação:

1. o sistema é possível exactamente quando um vector $(x, y, z., w.u) \in W$;
2. Como as colunas da matriz dos coeficientes são os geradores de W, aquelas que correspondem às colunas com pivôs no final da eliminação de Gauss, são uma base de W.

A eliminação de Gauss conduz ao seguinte resultado:

$$\left[\begin{array}{rrr|c} -1 & 1 & -5 & x \\ 1 & 0 & 2 & y \\ 1 & 0 & 2 & z \\ 1 & 0 & 2 & w \\ 0 & 1 & -3 & u \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|c} -1 & 1 & -5 & x \\ 0 & 1 & -3 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & -y+z \\ 0 & 0 & 0 & -y+w \\ 0 & 0 & 0 & -x-y+u \end{array}\right].$$

1.
   (a) Como na parte dos coeficientes as colunas 1 e 2 são as que contêm os pivôs, e essas colunas correspondem na matriz original às colunas respeitantes aso vectores $(-1, 1, 1, 1, 0)$ e $(1, 0, 0, 0, 1)$ resulta que

   $$\{(-1, 1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1)\}$$

   é uma base de W.

   (b) Da eliminação de Gauss acima também resulta que $(x, y, z, w, u) \in W$ sse

   $$\begin{cases} -x + z = 0 \\ -y + w = 0 \\ -x - y + u = 0 \end{cases}$$

   o que significa que W é o núcleo da matriz

   $$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (c) Como W tem dimensão dois, não podemos escolher em W mais que dois vectores linearmente independentes. Por outro lado dados dois vectores linearmente independentes de W, o respectivo conjunto pode estender-se de modo a obter uma base de $\mathbb{R}^5$. Desta forma, o número máximo de vectores de W que podem integrar uma base de $\mathbb{R}^5$ é 2.

2. Tem-se que $\dim(L_V(\{w_1, w_2\})) \leq 2$. Desta forma, se $\{u_1, u_2, u_3\} \subset L_V(\{w_1, w_2\})$ seriam linearmente independentes (num espaço de dimensão n não podem existir mais que n vectores linearmente independentes). Mas isto seria uma contradição pois estamos a partir do princípio que $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base (em particular, os vectores u_1, u_2, u_3 são linearmente independentes).