Miniteste 03

AL8—Versão A (1,3,4,8)
28.10.2021–08:00

1 [1.0 val.].—Considere a matriz

$$A_c = \begin{bmatrix} 2 & c & c \\ c & c & c \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix}$$

Indique os valores de c para os quais a matriz A_c não é invertível.

2 [0.5 val.].—Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (onde $n \geq 5$) uma matriz tal que $A_{*,3} = A_{*,1} + A_{*,2}$. A matriz A tem inversa? **Justifique!**

3 [0.5 val.].—Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $B = SAS^{-1}$, para alguma matriz $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Verifique que se A tem inversa então B tem inversa e, nesse caso, indique a inversa de B em função da inversa de A.

1. A matriz não é invertível exactamente quando car$(A) > 3$. Procedendo à eliminação de Gauss obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & c & c \\ c & c & c \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ c & c & c \\ 2 & c & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & -c & c - c^2 \\ 0 & c-4 & -c \end{bmatrix}$$

se $c = 0$ a última matriz tem uma lina de zeros pelo que que a sua característica é < 3, logo não é invertível. Para $c \neq 0$ podemos continuar, dividindo a segunda linha por $-c$, obtendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & c-1 \\ 0 & c-4 & -c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & c-1 \\ 0 & 0 & -c-(c-1)(c-4) \end{bmatrix}$$

pelo que a característica é neste caso < 3 precisamente quando

$$0 = -c - (c-1)(c-4) = -(c-2)^2$$

ou seja, quando $c = 2$. Resumindo, A_c não é invertível quando $c = 0$ ou $c = 2$.

2. Uma matriz para ter inversa tem que ter característica máxima, ou seja o conjunto das suas colunas tem que ser linearmente independente. Neste caso a terceira coluna é uma combinação linear das colunas 1 e 2, pelo que as colunas constituem um conjunto linearmente dependente de vectores. Assim, a matriz não é invertível.

3. Se A tem inversa, A^{-1}, então, considerando $D = SA^{-1}S^{-1}$ tem-se:

$$BD = (SAS^{-1})(SA^{-1}S^{-1}) = SA(S^{-1}S)A^{-1}S^{-1} = S(AA^{-1})S^{-1} = SS^{-1} = \mathbb{1}.$$

Este facto implica que B é invertível e $D = SA^{-1}S^{-1}$ é a inversa de B.