Álgebra Linear

Primeiro semestre

2020–2021

Aula 14

Álgebra das representações matriciais

Teorema.—*Sejam,* $S, T : U \to V$, $R : V \to W$, *transformações lineares e* $\boldsymbol{\beta}, \bar{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}$ *bases ordenadas de* U, V *e* W, *respectivamente. Consideremos ainda escalares* $\lambda, \xi \in \mathbb{K}$. *Tem-se:*

$$[\lambda S + \xi T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\beta}} = \lambda[S]_{\bar{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\beta}} + \xi[T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\beta}}$$

$$[RS]_{\ddot{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\beta}} = [R]_{\ddot{\boldsymbol{\beta}},\bar{\boldsymbol{\beta}}}[S]_{\bar{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\beta}}$$

Se R *é invertível (caso em que* $\dim V = \dim W$*) então:*

$$[R^{-1}]_{\bar{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}} = [R]^{-1}_{\ddot{\boldsymbol{\beta}},\bar{\boldsymbol{\beta}}}$$

Exemplo

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = x + (x + y)t + (x + y + z)t.$$

Mostrar que T é invertível e determinar T^{-1}.

Sendo $\boldsymbol{\beta}$ e $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ as bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}_2[t]$, respectivamente tem-se:

$$T(1,0,0)_{\bar{\beta}} = (1 + t + t^2)_{\bar{\beta}} = (1,1,1)$$

$$T(0,1,0)_{\bar{\beta}} = (t + t^2)_{\bar{\beta}} = (0,1,1)$$

$$T(0,0,1)_{\bar{\beta}} = (t^2)_{\bar{\beta}} = (0,0,1)$$

$$[T]_{\bar{\beta},\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $\text{car}(A) = \text{car}(A^\top)$ e como se vê facilmente que $\text{car}(A^\top) = 3$, concluímos que A é invertível e, desta forma, que T é invertível. Tem-se ainda que:

$$[T^{-1}]_{\beta,\bar{\beta}} = [T]^{-1}_{\bar{\beta},\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tem-se então que $T^{-1}(a + bt + ct^2)_\beta = [T]^{-1}_{\bar{\beta},\beta}(a + bt + ct^2)_{\bar{\beta}}$ ou seja:

$$T^{-1}(a + bt + ct^2)_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -a + b \\ -b + c \end{bmatrix}$$

Pelo que: $T^{-1}(a + bt + ct^2) = (a, -a + b, -b + c)$.

n-Paralelogramos

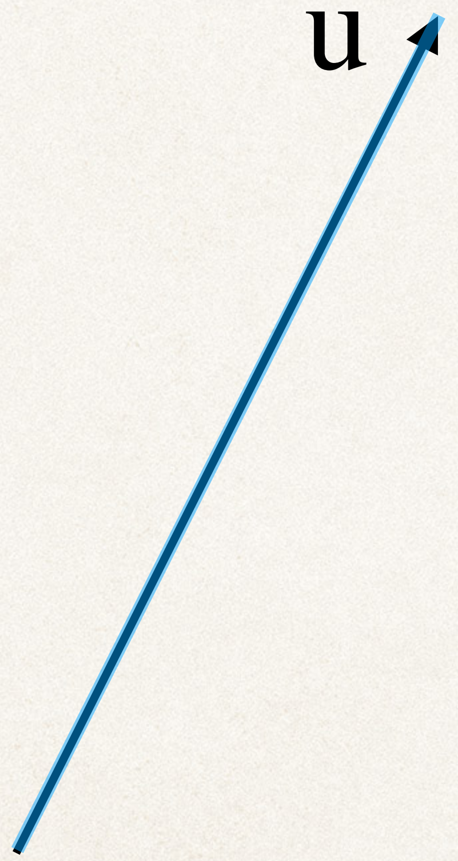
n-paralelogramos

$n = 0$

• $\{\mathbb{O}\}$

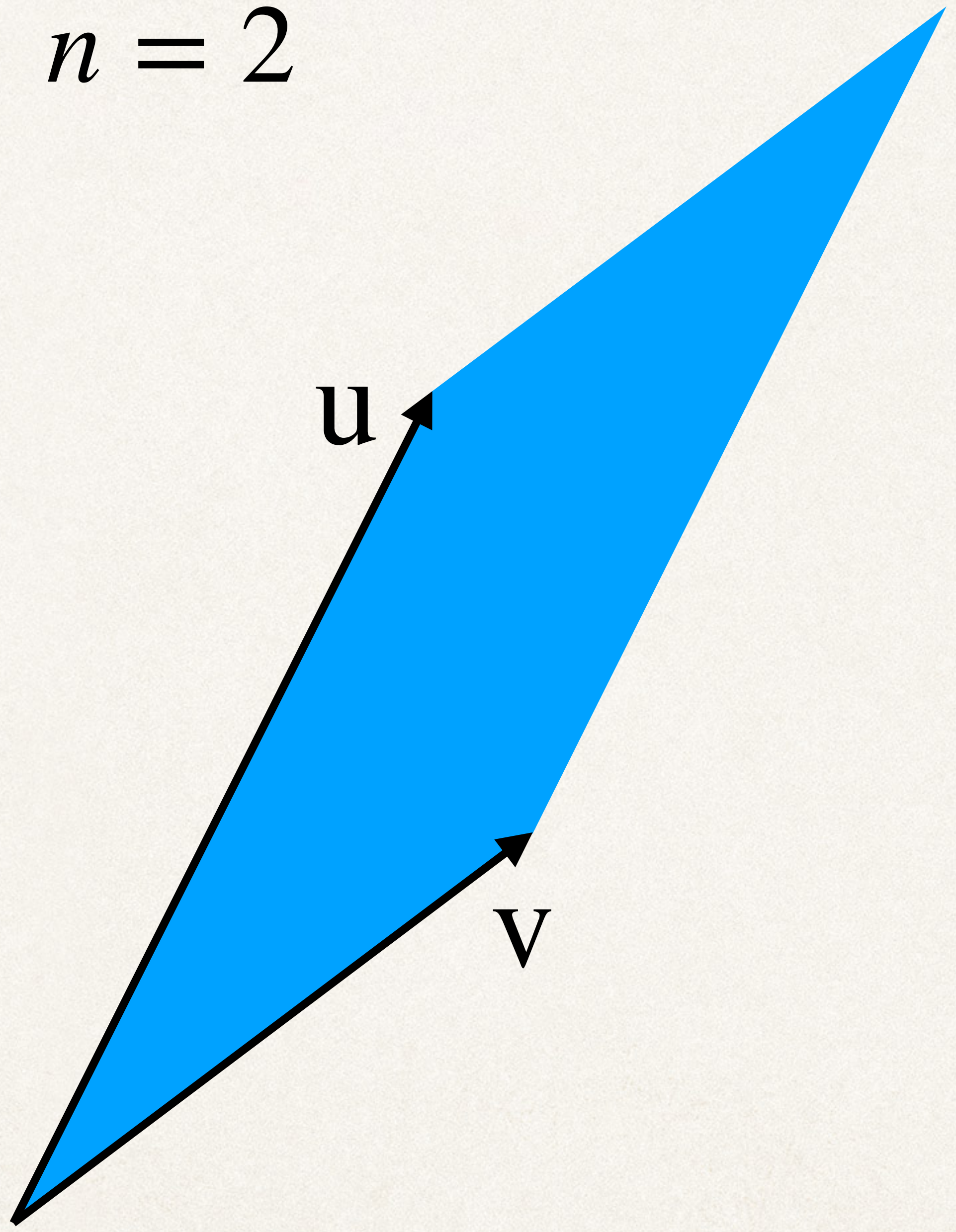
$\{\alpha\mathbb{O} \mid \alpha \in [0,1]\}$

$n = 1$



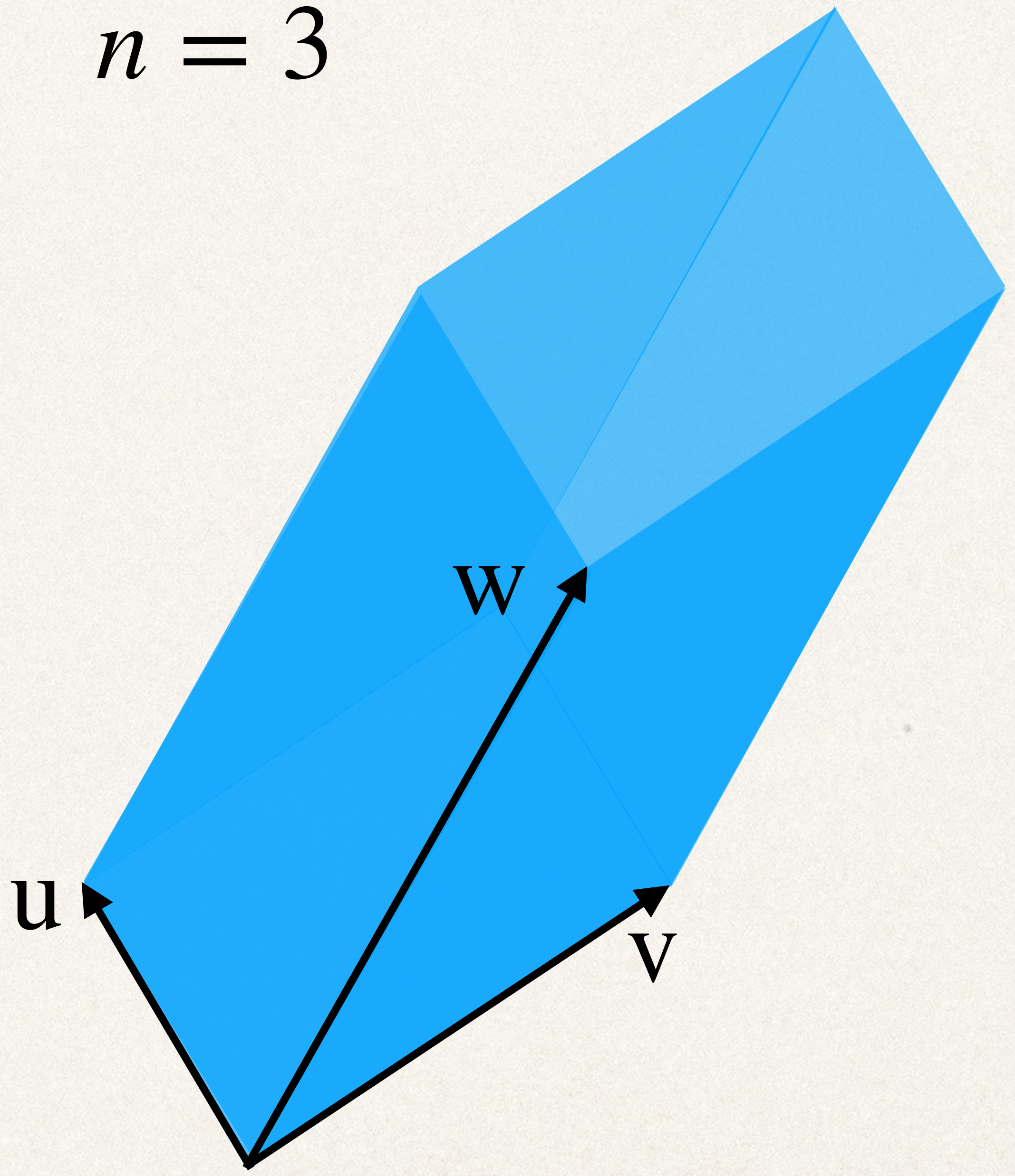
$\{\alpha \mathrm{u} \mid \alpha \in [0,1]\}$

$n = 2$



$\{\alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v} \mid \alpha, \beta \in [0,1]\}$

$n = 3$



$\{\alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v} + \eta \mathrm{w} \mid \alpha, \beta, \eta \in [0,1]\}$

etc,...

n-Paralelogramos

Definição [n-paralelogramo].—*Seja U um espaço de dimensão n. Dados n vectores $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n \in U$ o n-paralelogramo determinado por aqueles vectores é o conjunto*

$$P(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n) = \{\eta_1 \mathrm{u}_1 + \cdots + \eta_n \mathrm{u}_n \mid \eta_1, \ldots, \eta_n \in [0,1]\}$$

Não excluímos a possibilidade de os vectores $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n$ serem linearmente dependentes, caso em que obtemos *sólidos degenerados* cujo volume se considera nulo (correspondendo à situação nas dimensões dois e três).

n-Paralelogramos

Uma transformação linear $T : V \to V$ transforma n-paralelogramos em n-paralelogramos, mais precisamente:

$$T(P(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)) = T(\{\eta_1 \mathrm{u}_1 + \cdots + \eta_n \mathrm{u}_n \mid \eta_1, \ldots, \eta_n \in [0,1]\}) =$$

$$= \{T(\eta_1 \mathrm{u}_1 + \cdots + \eta_n \mathrm{u}_n) \mid \eta_1, \ldots, \eta_n \in [0,1]\} =$$

$$= \{\eta_1 T(\mathrm{u}_1) + \cdots + \eta_n T(\mathrm{u}_n) \mid \eta_1, \ldots, \eta_n \in [0,1]\} =$$

$$= P(T(\mathrm{u}_1), \ldots, T(\mathrm{u}_n))$$

Volume de um *n*-Paralelogramo

Para cada dimensão n procuramos uma função que possa *medir o volume* dos n-paralelogramos. Representamos essa função por $\det(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$.

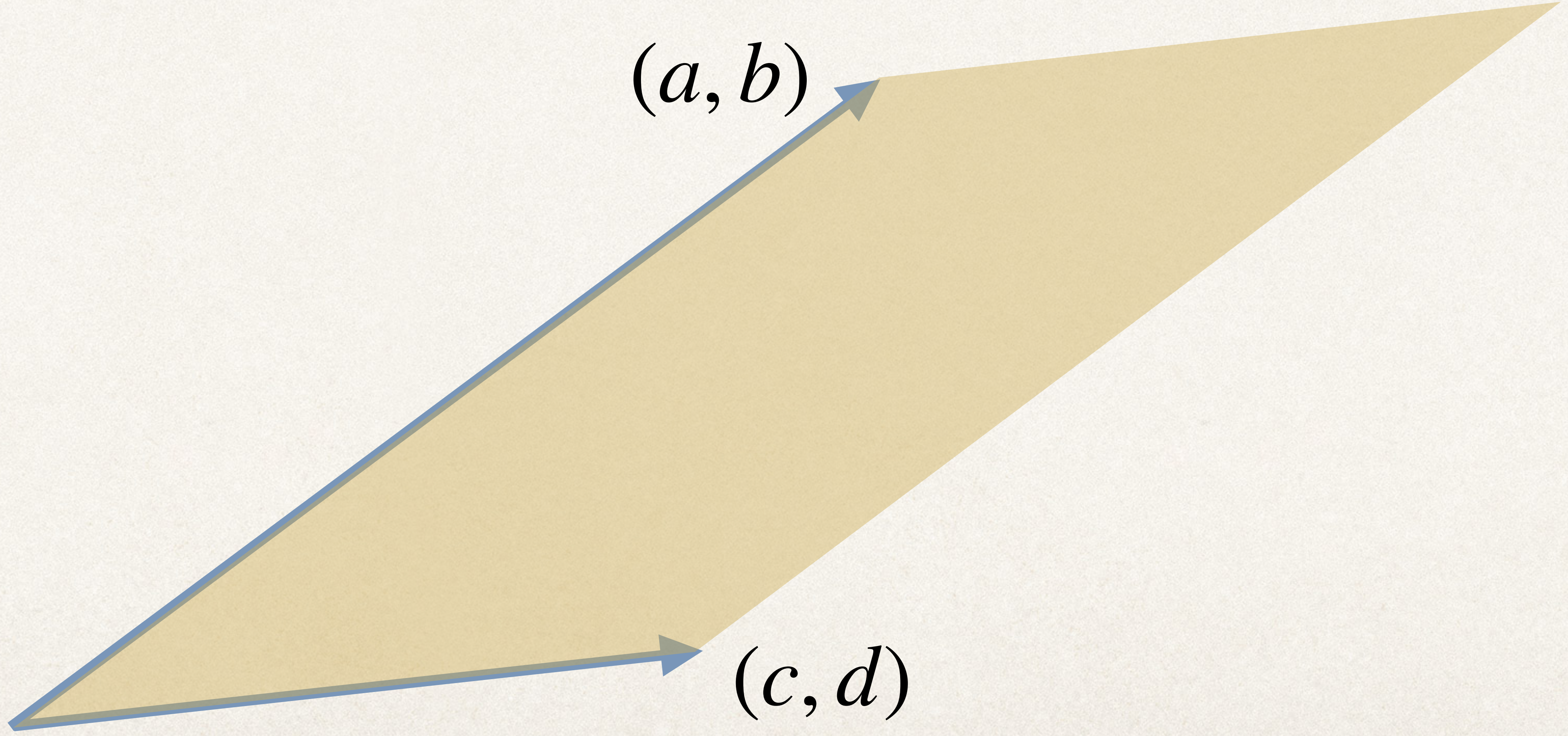
Veremos que uma tal função existe e que:

$$|\det(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)| = \mathrm{volume}\big(P(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)\big)$$

O caso da dimensão 2

No caso da dimensão dois e considerando um paralelogramo determinado por vectores $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ a respectiva área é dada por $|ad - bc|$ i.e.,

$$\text{área}(P((a, b), (c, d))) = |ad - bc|$$



O caso da dimensão 2

Poderíamos então definir:

$$\det((a, b), (c, d)) = |\, ad - bc \,|$$

Mas é mais conveniente considerar duas modificações:

1. Definir o determinante não como uma função cujos argumentos são vectores mas sim matrizes (**cujas colunas são os vectores**).

2. Evitar o uso directo do módulo i.e., considerar

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

O caso da dimensão 2

Optando por considerar o determinante como uma função que envolve matrizes (as suas colunas), podemos também lidar com um aspecto importante das transformações lineares (neste caso das transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$):

Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear então, existe um escalar $\alpha \geq 0$ tal que:

$$\alpha \frac{\text{área}(T(P))}{\text{área}(P)}$$

para qualquer paralelogramo P. Se $T(1,0) = (a, b)$ e $T(0,1) = (c, d)$ então,

$$\alpha = \left| \det \left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \right) \right|$$

O caso da dimensão 2

Ou seja,

$$\text{área}(T(P)) = \left|\det\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right)\right| \text{área}(P)$$

O caso da dimensão 2 propriedades do determinante

A função $\det(A)$, possui propriedades interessantes, designadamente:

$\det(A) = \det(A^\top)$, *pelo que o determinante tanto pode ser visto como uma função das colunas como das linhas de* A.

O caso da dimensão 2 propriedades do determinante

$\det(A)$, *é linear em cada uma das colunas de A i.e.,*

$$\det\left(\begin{bmatrix}\alpha A^1_{*,1} + \beta A^2_{*,1} & A_{*,2}\end{bmatrix}\right) = \alpha \det\left(\begin{bmatrix}A^1_{*,1} & A_{*,2}\end{bmatrix}\right) + \beta \det\left(\begin{bmatrix}A^2_{*,1} & A_{*,2}\end{bmatrix}\right)$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}A_{*,1} & \alpha A^1_{*,2} + \beta A^2_{*,2}\end{bmatrix}\right) = \alpha \det\left(\begin{bmatrix}A_{*,1} & A^1_{*,1}\end{bmatrix}\right) + \beta \det\left(\begin{bmatrix}A_{*,1} & A^2_{*,1}\end{bmatrix}\right)$$

O $\det(A)$, *é uma* **forma 2-linear nas colunas de** A *(ou simplesmente uma* **forma multilinear nas colunas de** A*).*

O caso da dimensão 2 propriedades do determinante

Uma vez que $\det(A) = \det(A^\top)$, *a função* $\det(A)$, *é linear em cada uma das linhas de A i.e.,*

$$\det\left(\begin{bmatrix} \alpha A^1_{1,*} + \beta A^2_{1,*} \\ A_{2,*} \end{bmatrix}\right) = \alpha \det\left(\begin{bmatrix} A^1_{1,*} \\ A_{*,2} \end{bmatrix}\right) + \beta \det\left(\begin{bmatrix} A^2_{1,*} \\ A_{2,*} \end{bmatrix}\right)$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A_{1,*} \\ \alpha A^1_{2,*} + \beta A^2_{2,*} \end{bmatrix}\right) = \alpha \det\left(\begin{bmatrix} A_{1,*} \\ A^1_{1,*} \end{bmatrix}\right) + \beta \det\left(\begin{bmatrix} A_{1,*} \\ A^2_{1,*} \end{bmatrix}\right)$$

O $\det(A)$, *é uma* **forma 2-linear nas linhas de** A *(ou simplesmente uma* **forma multilinear nas linhas de** A*).*

O caso da dimensão 2 propriedades do determinante

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Tem-se que $\det(A) \neq 0$ *se e só se as colunas (ou de forma equivalente, as linhas) de* A *são linearmente independentes i.e., se e só se* $\mathrm{car}(A)$ *é máxima.*

Uma matriz A *é invertível se e só se* $\det(A) \neq 0$ *e, neste caso,* $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

O caso da dimensão 2 propriedades do determinante

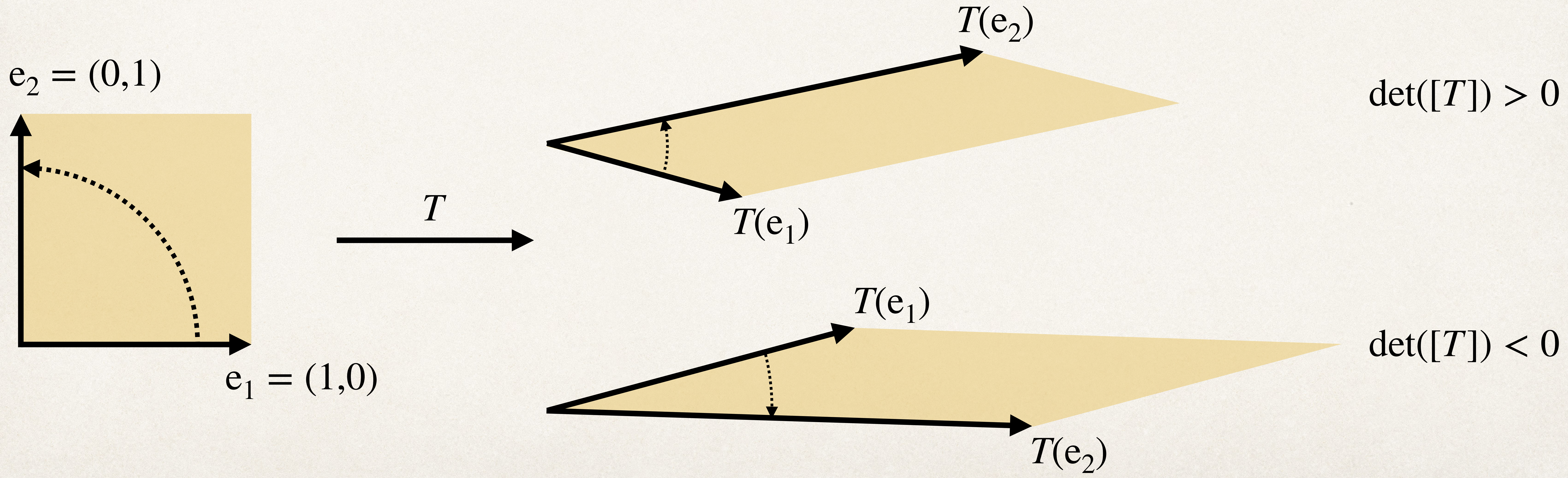
Se B resulta de A trocando duas linhas (ou duas colunas) então

$$\det(B) = -\det(A)$$

A função $\det(A)$ é uma **forma 2-linear alternada** (ou simplesmente: uma **forma multilinear alternada**).

O caso da dimensão 2 propriedades do determinante

Já sabemos que $|\det(A)|$ é a área do paralelogramo $P(A_{*,1}, A_{*,2})$ (e também de $P(A_{1,*}, A_{2,*})$).
Mas qual é o significado do **sinal do determinante**?



Generalização

Uma forma n-linear alternada (ou simplesmente: **multilinear alternada**) em $\mathbb{K}^n$ é uma função:

$$f : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ vezes}} \to \mathbb{K}$$

que é n-linear i.e.,

$$f(\mathrm{u}_1, \ldots, \alpha \mathrm{x}_i + \beta \mathrm{y}_i, \ldots, \mathrm{u}_n) = \alpha f(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{x}_i, \mathrm{u}_n) + \beta f(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{y}_i, \ldots, \mathrm{u}_n)$$

para qualquer $1 \leq i \leq n$, e é **alternada** i.e., para qualquer $1 \leq i < j \leq n$ tem-se:

$$f(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{x}_i, \ldots, \mathrm{x}_j, \ldots, \mathrm{u}_n) = - f(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{x}_j, \ldots, \mathrm{x}_i, \ldots, \mathrm{u}_n)$$

Generalização

Teorema.—Para qualquer n existe uma (única) forma n-linear alternada em $\mathbb{K}^n$.

De modo a dispormos de uma forma de medir o volume de um qualquer n-paralelogramo, generalizamos a noção de determinante. Se f_n é a única forma n-linear alternada em $\mathbb{K}^n$ então, dada uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definimos:

$$\det(A) = |A| := f_n(A_{*,1}, \ldots, A_{*,n})$$

Generalização

Usando a definição de f_n e a definição de $\det(A)$ resulta que:

$$\det(A) = |A| := f_n(A_{*,1}, \ldots, A_{*,n}) = f_n(A_{1,*}, \ldots, A_{n,*})$$

Assim, $\det(A) = \det(A^\top)$.

Das definições também resulta que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Além disso trata-se de uma generalização do caso particular da dimensão dois, pois com a nova definição continua a ter-se:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

Propriedades adicionais do determinante

A função $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ satisfaz:

Se B se obtém de A trocando duas linhas (ou duas colunas) então $\det(B) = -\det(A)$.

Se B se obtém de A substituindo $A_{i,*}$ por $A_{i,*} + \alpha A_{j,*}$ (ou $A_{*,i}$ por $A_{*,i} + \alpha A_{*,j}$) então, $\det(B) = \det(A)$.

Se B se obtém de A substittuindo $A_{i,*}$ por $\alpha A_{i,*}$ (ou $A_{*,i}$ por $\alpha A_{*,i}$), com $\alpha \neq 0$, então $\det(B) = \alpha \det(A)$

Se $A_{i,*} = \sum_{j\neq i} \eta_j A_{j,*}$ (ou $A_{*,i} = \sum_{j\neq i} \eta_j A_{*,j}$) então, $\det(A) = 0$.

Determinantes e o método de eliminação de Gauss

*Estas propriedades são suficientes para calcular o determinante de qualquer matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ (observe-se que, por definição **o determinante só tem sentido relativamente a matrizes quadradas**).*

Usando o método de eliminação de Gauss, podemos transformar uma matriz A numa matriz $\bar{A}$ em escada de linhas (e portanto triangular superior).

Tem-se então que $|A| = k|\bar{A}|$ onde o valor de k é de terminado pela forma como as operações elementares afectam o determinante.

TEOREMA.—*Se uma matriz $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ é **triangular superior** (ou **inferior**) então, o determinante de B é o produto dos elementos da diagonal principal.*

Como uma matriz em escada de linhas é uma matriz triangular superior, o método de eliminação de Gauss permite determinar o determinante de uma qualquer matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Problema 5.4.— Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que para $x = 0$ e $x = 2$ se tem que:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Problema 5.6.— Sem calcular explicitamente o determinante escreva:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix}$$

Problema 5.5.— Sem calcular explicitamente o determinante mostre que:

$$\begin{vmatrix} b + c & c + a & b + a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Problema 5.6.— Sem calcular explicitamente o determinante escreva:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix}$$

como uma soma de quatro determinantes em cujas entradas não figurem adições.

PROBLEMA 5.7.— Diga, justificando, se é ou não verdadeira a igualdade:

$$\det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{B}).$$