Álgebra Linear

Primeiro semestre

2020–2021

Aula 13

Isomorfismos

Definição.—*Uma transformação linear $T : U \to V$ diz-se um* **isomorfismo** *se for bijectiva.*

Se T é um **isomorfismo** então $\dim(U) = \dim(V)$.

Se $T : U \to V$ é um **isomorfismo** então, os vectores $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n \in U$ satisfazem uma propriedade $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ (envolvendo noções de álgebra linear) em U se e só se $T(\mathrm{u}_1), \ldots, T(\mathrm{u}_n)$ satisfazem $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ em V. Por exemplo:

$\{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n\} \subset U$ é lin. indep. sse $\{T(\mathrm{u}_1), \ldots, T(\mathrm{u}_n)\} \subset V$ é lin. indep.

$\mathrm{x} \in L_U(\{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n\})$ sse $T(\mathrm{x}) \in L_V(\{T(\mathrm{u}_1), \ldots, T(\mathrm{u}_n)\})$

Isomorfismos (exemplos)

Sejam U um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $B = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$ é uma base ordenada de U.

A transformação $(\ )_B : U \to \mathbb{K}^n$ que transforma cada $\mathrm{x} \in U$ no seu vector de coordenadas, x_B, na base B, **é um isomorfismo**.

É **linear**: $(\alpha\mathrm{x} + \beta\mathrm{y})_B = \alpha\mathrm{x}_B + \beta\mathrm{y}_B$.

É **injectiva**: *dada a unicidade de representação numa base, vectores diferentes possuem coordenadas diferentes.*

É **sobrejectiva**: dado $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$ tem-se
$(\xi_1\mathrm{u}_1 + \cdots + \xi_n\mathrm{u}_n)_B = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$

Do mesmo modo, a transformação $(\ )^B : \mathbb{K}^n \to U$ que transforma cada $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$ no vector $(\xi_1, \ldots, \xi_n)^B \in U$ que tem aquele n-úplo como vector de coordenadas **é um isomorfismo**.

Operações envolvendo transformações elementares

Sejam $S, T \in \mathrm{Hom}(U, V)$. A transformação $S + T : U \to V$ é definida por:

$$(S + T)(\mathrm{x}) := S(\mathrm{x}) + T(\mathrm{x})$$

Sejam, $S \in \mathrm{Hom}(U, V)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. A transformação $\alpha T : U \to V$ é definida por:

$$(\alpha T)(\mathrm{x}) = \alpha T(\mathrm{x})$$

É simples verificar que $S + T$ e αT são transformações lineares.

Operações envolvendo transformações lineares

Sejam $S \in \mathrm{Hom}(U, V)$ e $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. A composição $T \circ S : U \to W$ define-se:

$$(T \circ S)(\mathrm{x}) = T(S(\mathrm{x}))$$

No contexto dos espaços lineares, em lugar de escrevermos $T \circ S$ escrevemos simplesmente TS.

A composição $TS : U \to W$ **é uma transformação linear**.

$$\begin{aligned} TS(\alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y}) &= T(S(\alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y})) = T(\alpha S(\mathrm{x}) + \beta S(\mathrm{y})) = \\ &= \alpha T(S(\mathrm{x})) + \beta T(S(\mathrm{y})) = \alpha (TS)(\mathrm{x}) + \beta (TS)(\mathrm{y}) \end{aligned}$$

Operações envolvendo transformações lineares

Sejam U e V espaços com a mesma dimensão e $T : U \to V$ bijectiva. Enquanto função, T tem uma inversa (**única**) que é a função $T^{-1} : V \to U$, definida pelas identidades:

$$T^{-1}T(\mathrm{x}) = \mathrm{x} \qquad (\mathrm{x} \in U) \qquad\qquad TT^{-1}(\mathrm{y}) = \mathrm{y} \qquad (\mathrm{y} \in V)$$

Teorema.—*Sejam U e V espaços com a mesma dimensão e $T : U \to V$ bijectiva.* ***A inversa de T é uma transformação linear $T^{-1} : V \to U$.***

Representação matricial de um transformação linear

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Sejam ainda $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ e $\bar{\boldsymbol{\beta}} = (\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_m)$ bases ordenadas de U e V, respectivamente.

Uma representação matricial de T relativamente às bases $\boldsymbol{\beta}$ e $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ é uma matriz que se denota por $[T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\beta}}$ e que satisfaz:

$$[T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\beta}} \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

$$T(\mathrm{x})_{\bar{\boldsymbol{\beta}}} = [T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\beta}}\mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}}$$

Ou seja, a representação matricial de T, relativamente às bases ordenadas $\boldsymbol{\beta}$ do espaço de partida e $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ do espaço de chgada, é a (única) matriz que multiplicada pelo vector de coordenadas $\mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}}$ de um vector $\mathrm{x} \in U$, produz o vector de coordenadas $(T(\mathrm{x}))_{\bar{\boldsymbol{\beta}}}$ da imagem de x através de T.

Representação matricial de um transformação linear

Teorema.—*Sejam, $T : U \to V$ uma transformação linear, $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n)$ e $\bar{\boldsymbol{\beta}} = (\mathrm{f}_1, \dots, \mathrm{f}_m)$ bases ordenadas de U e V, respectivamente. A matriz que representa T, relativamente às bases $\boldsymbol{\beta}$ e $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ é a matriz que se denota por $[T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\beta}}$* ***e cujas colunas são os vectores de coordenadas, $T(\mathrm{e}_i)_{\bar{\boldsymbol{\beta}}}$, das imagens dos vectores da base $\boldsymbol{\beta}$, na base $\bar{\boldsymbol{\beta}}$.***

Nas condições do teorema acima, se A é uma matriz que satisfaz

$$T(\mathrm{x})_{\bar{\boldsymbol{\beta}}} = A\mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}}$$

para qualquer $x \in U$ então, $[T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\beta}} = A$. Ou seja, **a matriz que representa relativamente às bases $\boldsymbol{\beta}$, $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ é única**.

Exemplo 1

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$.

Considerem-se as bases $\boldsymbol{\beta} = ((1,1,0), (1, -1,0), (0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ e $\bar{\boldsymbol{\beta}} = ((1,0), (1,1))$ de $\mathbb{R}^2$. Qual a matriz que representa T relativamente às bases $\boldsymbol{\beta}$ e $\bar{\boldsymbol{\beta}}$?

Temos que determinar

$$T(1,1,0)_{\bar{\beta}} = (2,1)_{\bar{\beta}}$$
$$T(1,-1,0)_{\bar{\beta}} = (0,1)_{\bar{\beta}}$$
$$T(0,0,1)_{\bar{\beta}} = (0,-1)_{\bar{\beta}}$$

que são as colunas de $[T]_{\bar{\beta},\beta}$

Resolvendo os três sistemas simultaneamente:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

obtém-se que:

$$[T]_{\bar{\beta},\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

Considere-se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por,

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$$

Qual a matriz que representa T relativamente às bases canónicas $\boldsymbol{\beta}$ e $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^{2\times 2}$, respectivamente.

A base canónica de $\mathbb{R}^2$ é ((1,0), (0,1)). Tem-se então:

$$T(1,0)_{\bar{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{\bar{\beta}} = (1,0,0,1)$$

$$T(0,1)_{\bar{\beta}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{\bar{\beta}} = (0,1,1,0)$$

Pelo que,

$$[T]_{\bar{\beta},\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

Considere a matriz A,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Supondo que $A = [T]_{\bar{\beta},\beta}$ onde $\bar{\beta} = (1+t, 2t, 1+t^2)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}_2[t]$ e β é a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Determine $T(x,y,z)$.

$$T(x,y,z)_{\bar{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} (x,y,z)_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

i.e.,

$$T(x,y,z)_{\bar{\beta}} = (x+y, y-z, y+2z)$$

e assim,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (x+y)(1+t) + (y-z)(2t) + \\ &\quad + (y+2z)(1+t)^2 = \\ &= (x+2y+2z) + (x+3y-2z)t + (y+2z)t^2 \end{aligned}$$

Problema.— Supondo que $T : U \to V$ é linear, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ são bases ordenadas de U e que $\bar{\boldsymbol{\beta}}_1, \bar{\boldsymbol{\beta}}_2$ são bases ordenadas de V. Qual a relação entre $[T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}}_1,\boldsymbol{\beta}_1}$ e $[T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}}_2,\boldsymbol{\beta}_2}$?

A relação, que envolve as matrizes de mudança de base é a seguinte:

$$[T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}}_1,\boldsymbol{\beta}_1} = [\bar{\boldsymbol{\beta}}_1, \bar{\boldsymbol{\beta}}_2][T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}}_2,\boldsymbol{\beta}_2}[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1]$$

Exemplo

Suponhamos que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear e que $\boldsymbol{\beta} = ((1,0), (1,1))$. Suponhamos ainda que

$$[T]_{\beta,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Qual a representação matricial de T relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$?

Sendo $\boldsymbol{\beta}_c = ((1,0), (0,1))$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$ temos que

$$[\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_c] = [\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo assim:

$$[T]_{\beta_c,\beta_c} = [\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}][T]_{\beta,\beta}[\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_c] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A relação entre $\mathrm{Im}(T)$ e $\mathrm{EC}([T]_{\bar{B},B})$.

Suponhamos que $T : U \to V$ é linear, $\boldsymbol{\beta}, \bar{\boldsymbol{\beta}}$ são bases ordenadas de U e V, respectivamente e que $A = [T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\beta}}$ é a matriz que representa T relativamente à bases $\boldsymbol{\beta}$ e $\bar{\boldsymbol{\beta}}$.

Nestas condições tem-se, $\mathrm{EC}(A) = \mathrm{Im}(T)_{\bar{\boldsymbol{\beta}}}$ ou seja, $\mathrm{EC}(A)^{\bar{\boldsymbol{\beta}}} = \mathrm{Im}(T)$. Em particular se $\mathrm{EC}(A) = L_{\mathbb{K}^m}(\{\mathrm{u}_1, \ldots, u_k\})$, onde $m = \dim(V)$, então $\mathrm{Im}(T) = L_V(\{(\mathrm{u}_1)^{\bar{\boldsymbol{\beta}}_1}, \ldots, (\mathrm{u}_k)^{\bar{\boldsymbol{\beta}}_k})\})$

Além disso:

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{EC}(A)) = \mathrm{car}(A)$$

Exemplo

Suponhamos que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é linear, $\boldsymbol{\beta} = ((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)), \bar{\boldsymbol{\beta}} = ((1,1),(1,2))$ são bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente, e que:

$$A = [T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

determinar $\mathrm{Im}(T)$.

Tem-se $\mathrm{EC}(A) = L_{\mathbb{R}^2}(\{(1,-1),(1,0)\}) = \mathbb{R}^2$. Desta forma concluímos que $\mathrm{Im}(T) = (\mathbb{R}^2)^{\bar{\beta}} = \mathbb{R}^2$.

A relação entre $\mathrm{Nuc}(T)$ e $\mathrm{Nuc}([T]_{\bar{B},B})$

Suponhamos que $T: U \to V$ é linear, $\boldsymbol{\beta}, \bar{\boldsymbol{\beta}}$ são bases ordenadas de U e V, respectivamente e que $A = [T]_{\bar{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{\beta}}$ é a matriz que representa T relativamente à bases $\boldsymbol{\beta}$ e $\bar{\boldsymbol{\beta}}$.

Nestas condições tem-se que $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Nuc}(T)_{\boldsymbol{\beta}}$, ou seja, $\mathrm{Nuc}(T) = \mathrm{Nuc}(A)^{\boldsymbol{\beta}}$. Em particular, se $\dim(U) = n$ e $\mathrm{Nuc}(A) = L_{\mathbb{K}^n}(\{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_s\})$ então, $\mathrm{Nuc}(T) = L_U(\{(\mathrm{u}_1)^{\boldsymbol{\beta}}, \ldots, (\mathrm{u}_s)^{\boldsymbol{\beta}}\})$.

Além disso:

$$\dim \mathrm{Nuc}(T) = \dim \mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{nul}(A)$$

Exemplo

Suponhamos que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é linear, $\boldsymbol{\beta} = ((1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)), \bar{\boldsymbol{\beta}} = ((1,1), (1,2))$ são bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente, e que:

$$A = [T]_{\bar{\beta},\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar Nuc(T).

Tem-se,

$$\text{Nuc}(A) = \{(x, y, z) \mid x + z = 0 \wedge x = 0\} = \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(0,1,0)\})$$

pelo que,

$$\text{Nuc}(T) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(0,1,0)^{\beta}\}) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(0,1,1)\})$$

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}_2[t]$ a transformação linear que relativamente às bases canónicas dos dois espaços é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar $\mathrm{Nuc}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

Sejam $\boldsymbol{\beta}$ e $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ as bases canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e de $\mathbb{R}_2[t]$. Procedendo à eliminação de Gauss obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\mathrm{Nuc}(A) = \{(x, y, z, w) \mid y = z = 0 \wedge w = -x\} = \{(x,0,0,-x) \mid x \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,0,0,-1)\})$$

$$\mathrm{EC}(A) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,0), (0,1,1), (0,1,0)\})$$

Pelo que,

$$\mathrm{Nuc}(T) = L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}(\{(1,0,0,-1)^{\beta}\}) = L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right)$$

$$\mathrm{Im}(T) = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{(1,0,0)^{\bar{\beta}}, (0,1,1)^{\bar{\beta}}, (0,1,0)^{\bar{\beta}}\}) = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{1, t + t^2, t\}$$