Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula 11

Intersecção e soma de subespaços

U

Teorema.—*Sejam, V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $U, W \leqslant V$. A interseção de U e W é um subespaço de V. Dito de outra forma, a **intersecção de dois subespaços de um espaço é ainda um subespaço**.*

$U \cap W$

Se $U, W \leqslant V$ então $U \cap W$ é o maior subespaço contido em U e em W.

W

Intersecção de subespaços apresentados como expansões lineares

Considerando $U = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\})$ e $W = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,1,1,1),(1,2,0,0)\})$, ambos subespaços de $\mathbb{R}^4$, determinar uma base de $U \cap W$.

Para determinar a base da intersecção de dois subespaços de $\mathbb{K}^n$ apresentados como expansões lineares de conjuntos de vectores recorremos a um algoritmo.

Intersecção de subespaços apresentados como expansões lineares

Suponhamos que $U = L_{\mathbb{K}^n}(A)$ onde $A = \{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_r\}$ e $W = L_{\mathbb{K}^n}(B)$ onde $B = \{\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_s\}$.

1. Determinamos uma base para o núcleo da matriz

$$[A \mid -B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathrm{u}_1 & \cdots & \mathrm{u}_r & -\mathrm{w}_1 & \cdots & -\mathrm{w}_s \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}\right]$$

Intersecção de subespaços apresentados como expansões lineares

2. Essa base é da forma: $\left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \vdots \\ \alpha_r^1 \\ \beta_1^1 \\ \vdots \\ \beta_s^1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \alpha_1^n \\ \vdots \\ \alpha_r^n \\ \beta_1^n \\ \vdots \\ \beta_s^n \end{bmatrix} \right\}$

3. $L_V(A) \cap L_V(B)$ é gerado por: $\left\{ \begin{bmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathrm{u}_1 & \cdots & \mathrm{u}_r \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \vdots \\ \alpha_r^1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathrm{u}_1 & \cdots & \mathrm{u}_r \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^n \\ \vdots \\ \alpha_r^n \end{bmatrix} \right\}$

Intersecção de subespaços apresentados como expansões lineares

Considerando $U = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\})$ e $W = L_{\mathbb{R}}(\{(1,1,1,1), (1,2,0,0)\})$, ambos subespaços de $\mathbb{R}^4$, determinar uma base de $U \cap W$.

$$\mathrm{Nuc}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,1,1,0)\}) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo, uma base de $U \cap W$ é $\{(1,1,1,1)\}$.

Intersecção de subespaços apresentados como núcleos de matrizes

Se $U, W \leq \mathbb{K}^n$, $U = \mathrm{Nuc}(A)$ e $W = \mathrm{Nuc}(B)$ então, $U \cap W = \mathrm{Nuc}(A \barwedge B)$ onde $A \barwedge B$ é a matriz que se obtém aumentando A com as linhas de B.

Exercícios

Considere os subespaços $U, W \leq \mathbb{R}^{2\times 2}$ definidos por:

$$U = L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\left(\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}\right)$$

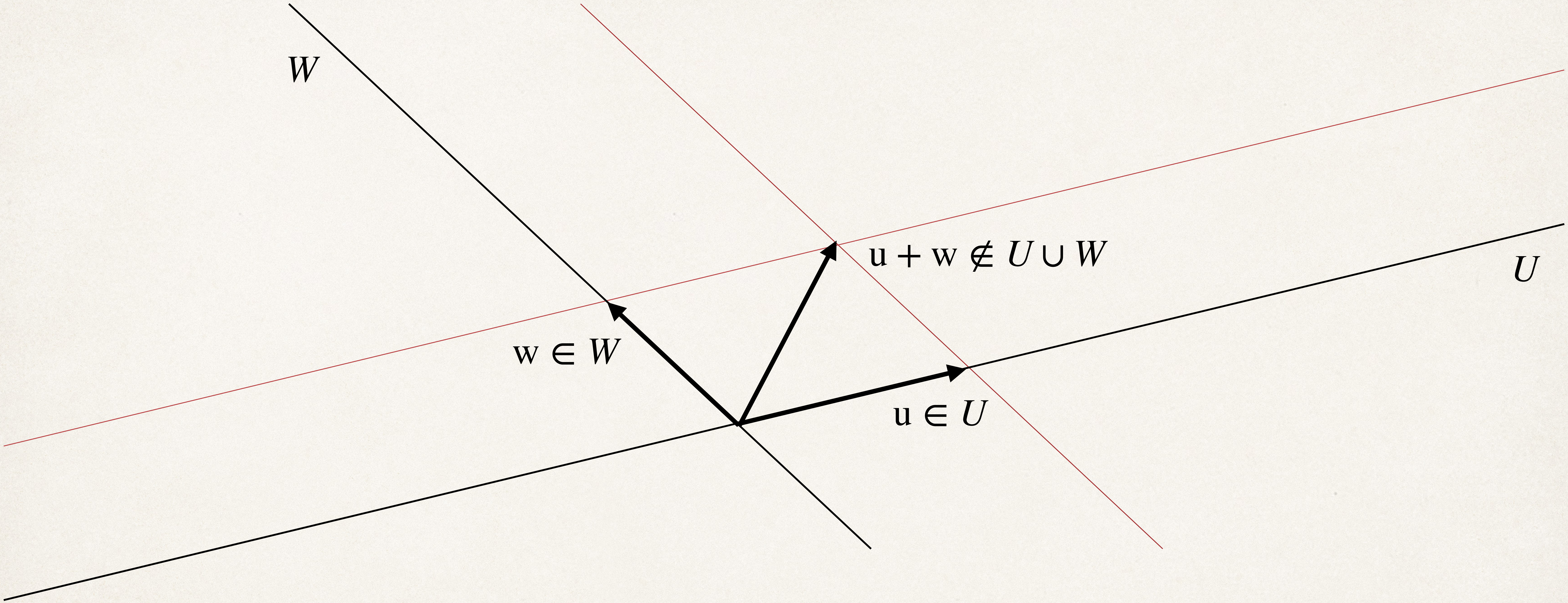
$$W = L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\left(\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\right\}\right)$$

Determine a dimensão de $U \cap W$.

Intersecção e soma de subespaços. Somas directas

Pensando no menor subespaço de V que contém dois subespaços $U, W \leqslant V$, a respectiva união apresenta-se como um natural candidato. **Infelizmente, essa ideia não funciona senão em situações triviais**:

Teorema.—*Sejam, V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $U, W \leqslant V$. A união de U e W é um subespaço de V se e só se $U \subset W$ ou $W \subset U$.*



Se queremos descrever o menor subespaço que contém U e W precisamos de uma ideia nova!

Intersecção e soma de subespaços. Somas directas

Definição.—*Sejam, V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $U, W \leqslant V$. A soma dos subespaços U e W, que se denota $U + W$ consiste nos vectores da forma* $\mathrm{u} + \mathrm{w}$ *onde* $\mathrm{u} \in U$ *e* $\mathrm{w} \in W$. *Ou seja,*

$$U + W = \{\mathrm{u} + \mathrm{w} \mid \mathrm{u} \in U \text{ e } \mathrm{w} \in W\}$$

Teorema.—*Sejam, V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $U, W \leqslant V$. Tem-se que $U + W \leqslant V$. Além disso, tem-se ainda que $U \cup W \subset U + W$.*

Intersecção e soma de subespaços. Somas directas

Teorema.—Seja V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$. Tem-se:

$$L_V(\{x_1, \ldots, x_n\}) + L_V(\{y_1, \ldots, y_m\}) = L_V(\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\})$$

Ou seja, se X e Y são conjuntos de vectores em V tem-se:

$$L_V(X) + L_V(Y) = L_V(X \cup Y)$$

Exemplo

Considerando $U = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\})$ e $W = L_{\mathbb{R}}(\{(1,1,1,1), (1,2,0,0)\})$, ambos subespaços de $\mathbb{R}^4$, determinar uma base de $U + W$.

Tem-se que $U + W = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,1,1,1), (1,2,0,0)\})$, que é o espaço das linhas da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, uma base de $U + W$ é $\{(1,1,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,1)\}$.

Soma directa

Definição.—*Se $U, W \leqslant V$ a soma $U + W$ diz-se uma* ***soma directa*** *se $U \cap W = \{\mathbb{0}\}$.*

Se a soma $U + W$ é directa representamo-la simbolicamente por $U \oplus W$.

Teorema.—*Sejam $U, W \leqslant V$. Suponhamos ainda que a soma destes dois subespaços é directa. Nestas condições, qualquer $\mathrm{x} \in U \oplus W$ é da forma $\mathrm{x} = \mathrm{u} + \mathrm{w}$ sendo u, w* ***únicos****. Ou seja, se $\mathrm{u}, \bar{\mathrm{u}} \in U$ e $\mathrm{w}, \bar{\mathrm{w}} \in W$ então, $\mathrm{u} + \mathrm{w} = \bar{\mathrm{u}} + \bar{\mathrm{w}}$ se e só se $\mathrm{u} = \bar{\mathrm{u}}$ e $\mathrm{w} = \bar{\mathrm{w}}$.*

Teorema.—*Sejam V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $U, W \leqslant V$. Tem-se a seguinte relação entre as dimensões de V, U e W:*

$$\dim(U + W) = \dim(\mathrm{U}) + \dim(\mathrm{W}) - \dim(\mathrm{U} \cap \mathrm{W})$$

A ideia da demonstração é a seguinte: sendo $\{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n\}$ uma base de $U \cap W$. Pode estender este conjunto de vectores linearmente independente a bases $\{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_s\}$ e $\{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_r\}$ de U e W, respectivamente.

Pode verificar-se que $\{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_s, \mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_r\}$ é uma base de $U + W$.

Tem-se então:

$$\underset{n+s+r}{\dim(U + W)} = \underset{n+s}{\dim(\mathrm{U})} + \underset{n+r}{\dim(\mathrm{W})} - \underset{n}{\dim(\mathrm{U} \cap \mathrm{W})}$$

$U \cap W$
U
W